《九章算術》開方算法系統及其與現代計算機程序的比較

傅海倫

中國古代把開方法與二次、三次或高次數字方程解法統稱爲開方術。《九章算術》少廣章提出了完整的開平方、開立方程序。

一、《九章算術》的開平方程序

開平方相當於求 $x^2 = N$ 的根。

開方術曰：「置積為實。借一算，步之，超一等。議所得，以一乘所借一算為法，而以除。除已，倍法為定法。其復除，折法而下。復置借算，步之如初，以復議一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副從定法。復除，折下如前。…」[1]

《九章算術》給出的術文言簡意賅，在開方籌式中每一個數字的記數和入算，都嚴格遵循位置値制。由於其中明確指出：「復除，折而下」、「復除，折下如前」，可見，這是一個具有一般性的機械化算法程序。即是說，不論平方根有多少位數，反覆實施這一程序都可求出來。所以，在此有必要對一般情形下的這種機械化程序加以剖析。

以總的來說，開平方的程序是：首先作四行的籌式佈算，即從上到下的四行依次佈以方根（「議所得」）、被開方數（實）、法和借算，然後機械反覆實施「超」、「議」、「除」、「折」的四大步驟，直至「適盡」、結束。

「超」：將置於個位上的借算自右向左隔一位移一步，移到與實的最高位（N 為奇數位）或次高位（N 為偶數位時）對齊為止。若移 n 位，這相當於將方程進行倍根變換，變換後的方程為 $10^{2n}x_1^2 = N$ 的形式，如圖 (2)

「議」：議得根的第一位得數為 a_1

「除」：以 a_1 乘借算 10^{2n} 得 $10^{2n}a_1$ 作為法。置於第三行，使得以法除實時，恰得商 a_1，而餘數 N_1 小於 $10^{2n}a_1^2$：$N \div (10^{2n}a_1) = a_1 + N_1 / 10^{2n}a_1$[2]。

「折」：撤去借算，將法 $10^{2n}a_1$ 加倍為定法，并將定法向右退一位為 $2\cdot10^{2n-1}a_1$ 如圖 (4)，再在下行個位上佈置借一算。

為求方根第二位得數，需要重覆以上四個步驟：

「超」：將置於個位上的借算自右向左隔一位移一步，顯然祇需移 $n-1$ 步，即 10^{2n-2} 如圖 (5)，這又相當於求方程 $10^{2n-2}x_2^2 + 2\cdot10^{2n-1}a_1x_2 = N - 10^{2n}a_1^2$ 的正根。

「議」：復議得根的第二位得數 a_2

「除」：以 a_2 乘借算 10^{2n-2}，加定法，得法：$2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2$，同樣以法除實：$(N-10^{2n}a_1{}^2)\div(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)=a_2+N_2/(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)$，餘數 N_2 小於 $(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)a_2$。如圖 (6)，如果餘數爲零，則開方完畢；若不爲零，則「折下如前」，按接下來的程序步驟繼續開方。

通過對上述籌算開平方法的分析，可知它是根據下面這些公式來逐步推求的，與現代的迭代法完全一致，可以通過計算機來實現：

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$$
$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+[2(a+b)+c]c$$
$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2[(a+b+c)+d]d$$
$$\cdots\cdots$$

開平方術文還有對幾種特殊情況的處理方法：一是被開方數爲分數的情形，要「通分內子」，若分母是平方數，則分子、分母分別開方，然後相除，即 $A=b/a$，$\sqrt{A}=\sqrt{b}/\sqrt{a}$；若分母不可開，則以分母乘分子，開分子後再以分母除，即 $A=b/a$，$A=ab/a^2$，$\sqrt{A}=\sqrt{ab}/a$。二是開方不盡的情形，這相當於求無理根，稱爲不可開，求出整數部分後，「以面命之」。

顯然，有了以上程序和處理方法，任何一個數可以開平方，說明《九章算術》的術文更具有抽象性、普適性。

二、《九章算術》的開立方程序

開立方相當於求 $x^3 = N$ 的根。

《九章算術》開立方術是：

開立方術曰：「置積為實。借一算，步之，超二等。議所得，以再乘所借一算為法，而除之。除已，三之為定法。復除，折而下。以三乘所得數，置中行。復借一算，置下行。步之，中超一，下超二等。復置議，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定除。除已，倍下，并中從定法。復除，折下如前。…」[3]。

對比開平方術和開立方術，不難看出，兩種開方的程序基本上是統一的，都是通過籌式佈算，機械重覆地實施「超」、「議」、「除」和「折」的四大步驟，直至適盡，結束。祇是在開立方的籌式佈算中，在「法」和「借算」之間增加一行「中行」，使原來的四行佈算變爲五行佈算，并在相應的「超」和「折」的步驟中有細小的變動或調整。對被開方數是分數、或分母不是立方的情形，處理的方式也與開平方相同，這說明，開立方的程序也具有抽象性和普適性，適應於任何一個數的開立方。根據術文，對一般情形下的開立方及其與開平方程序過程的比較可見下表：

商				$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1$
實	開平方	N	N	$N - 10^{2n} a_1^2$	$N - 10^{2n} a_1^2$	$N - 10^{2n} a_1^2$	$(N - 10^{2n} a_1^2) - (2 \cdot 10^{2n-1} a_1^2 + 10^{2n-2} a_2) a_2$
	開立方			$N - 10^{3n} a_1^3$	$N - 10^{3n} a_1^3$	$N - 10^{3n} a_1^3$	$(N - 10^{3n} a_1^3) - (3 \cdot 10^{3n-1} a_1^2 + 3 \cdot 10^{3n-2} a_1 a_2 + 10^{3n-3} a_2^2) a_2$
法	開平方			$10^{2n} a_1$	$2 \cdot 10^{2n} a_1$	$2 \cdot 10^{2n-1} a_1$	$2 \cdot 10^{2n-1} a_1 + 10^{2n-2} a_2$
	開立方			$10^{3n} a_1^2$	$3 \cdot 10^{3n} a_1^2$	$10^{3n-1} a_1^2$	$3 \cdot 10^{3n-1} a_1^2 + 3 \cdot 10^{3n-2} a_1 a_2 + 10^{3n-3} a_2^2$
中行	開平方	無					
	開立方				$3a_1$	$3 \cdot 10^{3n-2} a_1^2$	$3 \cdot 10^{3n-2} a_1$（副）$3 \cdot 10^{3n-2} a_1 a_2$
借算	開平方	1	10^{2n}	10^{2n}		10^{2n-2}	10^{2n-2}
	開立方	1	10^{3n}		1	10^{3n-3}	10^{3n-3}（副）$10^{3n-3} a_2^2$
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

通過分析上面的籌算開立方方法，可知它是根據下面這些公式來逐步推求的，也和現代迭代的方法完全一致，可以在計算機上實現。

$$(a+b)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$$
$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + [3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2]c$$
$$(a+b+c+d)^3 = (a+b+c)^3 + [3(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)d + d^2]d$$

……

中國古代數學將二次方程 $x^2+bx+c=0$ $(b , c>0)$ 的正根稱爲開帶從平方法，《九章算術》雖未給出開帶從平方和開帶從立方的程序，但在開平方、開立方術中從求根的第二位得數起，就是求形如 $x^2+bx+c=0$，$x^3+bx^2+cx=d$ $(b , c , d>0)$ 正根的程序，這實際上已蘊含了開帶從平方和立方的程序。

三、劉徽對開方程序的改進

劉徽借助於出入相補原理，對《九章算術》提出的開平方、開立方程序給予了幾何解釋，從而證明了開方程序的合理性，使人們對開方術有了直觀性的感性認識。同時，在闡述其幾何意義時，對開方程序也作了改進，以往論者認爲劉徽的開方程序與《九章算術》相同，劉徽衹是解釋了《九章算術》的程序，郭書春先生經過研究指出二者起碼有兩個重大不同[4]：

首先，《九章算術》中，在議得某位得數（設第一位 a，第二位 b）後，算出法（或定法）（開平方是 a 及 $2a+b$；開立方是 a^2 及 $3a^2+3ab+b^2$），再「以法除實」，使得「實如法」恰恰得到該位得數。此「除」即除法，顯然它還保留了開方由除法脫胎出來的痕跡，劉徽注開方術，是將「除實」解釋成以議得數乘法（開平方 a^2 及 $(2a+$

$b)b$；開立方是 a^3 及 $(3a^2 + 3ab + b^2)b$ 減實，此「除」，即減，這無疑是程序上的一大進步。

其次，《九章算術》的借算在每使用一次後都要撤去，議得次一位得數時要復置借算（開立方時還要置中行）於個位，再「步之如初」，顯得繁瑣，劉徽則保留借算，將中行與借算先與法對齊，再通過退位求減根方程，顯得簡潔。

總之，通過劉徽的改進，程序已簡便得多，已基本接近於現今方法，後來在《孫子算經》，《張丘建算經》及賈憲《黃帝九章算經細草》中得到了繼承和發展。

四、《九章算術》「開方術」與現代計算機程序比較

以上開平方、開立方、開帶以平方和立方程序，共同構成中國古代數學一個獨立的算法程序系統——開方算法程序系統，《九章算術》中開方算法程序不僅表現了中國籌算所能達到的高超的算技，而且充份體現了中國數學思想方法的構造性和算法機械化特色。《九章算術》與這種開方算法具有的代數意義密切相關。由於在開方中都借用一根算籌分別表示未知量的平方和立方，這樣就賦予用算籌所列出的開方式以 $x^2 = N$ 和 $x^3 = N$ 兩個代數方程，於是，開平方和開立方的各個演算步驟也就成了解方程求正根的過程。事實上，要

保證算法程序機械化的一步步進行，并在有限步驟內求得方根的每一位得數，從這種二項二次方程或二項三次方程的代數意義上，都要經過以下三個步驟：

I 首先把方程進行倍根變換，估計方根的第一次近似值。

II 每求得方根的一次近似值之後，就利用二項展開式將原方程進行減根變換，求出一個新的方程。

III 在新方程中，以定法除實即以一次項係數常數項，求得方程的下一次近似值。因此這些步驟可循環重覆，直至根值全部求出或求到一定數位爲止。

以開立方爲例，相當於求方程 $f(x) = x^3 - N = 0$ 的正根，估計方根的第一次近似值爲 x_1，依 II 進行減根變換，即令 $x = x_1 + y$ 則 $y = x - x_1$ 代入 $f(x) = 0$ 得

$y^3 + 3x_1y^2 + 3x_1^2y = N - x_1^3$ 再依 III $y = (N - x_1^3)/3x_1^2 = -f(x_1)/f'(x_1)$，因此，

$x = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$。

這就是《九章算術》開方術的演算原理，而這一原理，恰好是 Newton-Raphson 解法的根據[5][6]。

現代計算機要用牛頓一類的迭代法求一元二次或三次方程 $f(x) = 0$ 的根，首先大致估計出根的範圍，給一個初值 x_0，然後可用迭代

公式 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$ 依次求出第 $i+1$ 次根的近似值 x_{i+1}，設 ε 是所求根的精度要求，若滿足

$|(x_{i+1}-x_i)/x_{i+1}|<\varepsilon$，則 x_{i+1} 的值即爲所求方程的解，否則再求

$x_{i+2}=x_{i+1}-f(x_{i+1})/f'(x_{i+1})$，然後判斷 $|(x_{i+2}-x_{i+1})/x_{i+2}|<\varepsilon$ 是否成立，直至滿足精度爲止。由此看來，迭代法雖然也是程序化較強的算法，它是將每一次求得的新值又作爲下一次的初值來推求，直到前後兩次求出的值很接近，即接近真正的根，而且其初估值 x_0 以及每次的近似值也不一定是所求根的每一位得數，這和中國古算開平方和立方求方根的方法、程序不同。中國古算開方程序在有限步驟內依次求得方根的每位得數，通過倍根變換，估得方根的最高位得數，再通過減根變換，求得新方程和下一次近似值，即爲所求方根的次高位得數，如此繼續下去…，直至結束。

內蒙師大科學史研究所的沙娜曾用計算機 “FORTRAN 77” 程序語言設計出「開方術」的計算機程序，并對《九章》開方術與現代計算機開方中用到的牛頓迭代法進行比較[7]，指出雖然古今開方原理一樣，然而在具體程序進行中，因計算工具有不同，其算法亦不盡相同，因而「開方」計算機程序也不完全同一般的計算機牛頓開方算法。

計算機：

一般牛頓法開方有兩個缺點：1) 在理論上初始值 $x_1 > 0$ 即可，然而計算時此值若不在根附近，則往往不收斂。2) 在計算機中用到一階微分 $f'(x)$，但它可能無法得到或不易列出。這兩點在一般的開方中還并不明顯，但在以後的高次方程的數值解中則顯得突出。

籌算：

1) 對初始值的選取，由於一開始倍根，使得初始值很容易估計在根附近，并由於採用位置值制，使這一步極易做到。由於這個方法被一直保留到高次方程的數值解中，因而在高次方程數值解中亦不存在問題。

2) 一階微分即減根方程中的「方」，由於是用二次展開式係數得到，所以很好計算，在以後的高次方程數值解中，因用「增乘」方法得到，亦是很易計算與表達的。

計算機：

在求根的下一位有效值時，其值不取整，亦無倍根過程，因而迭代次數是籌算的 1 – 2 倍，當然對計算機這并不算甚麼。

籌算：

因用手移動籌來計算，計算次數不僅勞作繁忙且易出錯，對此籌算採取了取整的方法，使運算一次即可得到一位有效值，減少了

計算量，使用籌開方成為可能，這些方法均保留至以後的高次方程數值解中。[1]

中算史學家們對開方算法的代數意義及其構造性和機械化思想方法進行了深入的探究，發現開方算法用來求方程的數值解不僅較目前的牛頓一類的迭代法直截了當，而且可排除各種病態的優越性是頗為顯著的[8]。以上討論為此觀點提供了又一佐證。

《九章算術》中的開方程序一方面奠定了中國開方術歷史的良好基礎，開方術後來不斷改進和發展，成為中國古代數學的一個重要分支，同時也是中國古算中最發達的領域——解一般高次數字方程的程序，并取得了具有世界意義的重大成就：但另一方面，中國古代雖然能解高次方程，但沒有考慮過用一個公式來表示一方程的根，唐代僧一行和元代朱世傑雖然有類似的公式表示法，但中國古代重視數值計算，用公式求正根不如直接開方便捷，故公式表示一直沒有受到重視。

參考文獻與注釋

[1][3] 《九章算術》，郭書春匯校，遼寧教育出版社，1990 年。第 258、261 頁。

---

[1] 在國外，高次方程數值解的霍納算法即沒有倍根過程，這可能因其用筆算而致。

[2][4] 郭書春：《古代世界數學泰斗劉徽》，山東科技出版社，1992年。第 29–30 頁。

[5] 李兆華：「《九章算術》開立方術的代數意義」載《〈九章算術〉與劉徽》（吳文俊主編），北京師範大學出版社，1993 年，第 261 頁

[6] D.E. Smith: *History of Mathematics*, 1950, Vol. II. pp.472 – 473

[7] 沙娜：「籌算開方術的計算機程序與算法研究」，載《數學史研究文集》第四輯。

[8] 吳文俊：「從《數書九章》看中國傳統數學的構造性和機械化特色」，載吳文俊主編，《秦九韶與〈數書九章〉》，北師大出版社，1987 年，第 80 頁。