淺談數學概念表象
在數學教學上的一些問題（上）

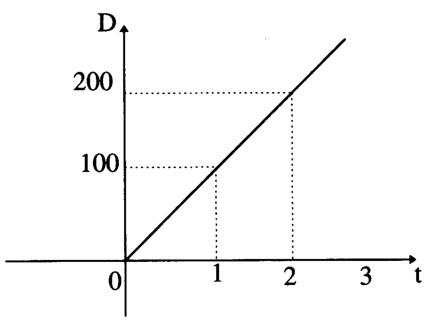
黃家鳴　　香港中文大學課程與教學學系

表象 (representation) 乃是指概念以某種方式的表達。就數學學習來說，我們可以區別外在表象 (external representation) 與內在表象 (internal representation)（見註一）。前者比較簡單，數學概念的外在表象包括整個數學符號系統、圖表、數表、模型、圖象、以致電腦螢光幕上可以顯示有變化的圖象、圖表等等。最簡單莫如阿拉伯數字「 5 」、中國數字「五」、英文「 five 」、德文「 fünf 」、法文「 cinq 」、羅馬數字「 v 」等，都可以代表「五」這個數量概念，這些都是「五」的（外在）表象。

又例如一個簡單的正比例關係：一列以時速 100 km 奔馳在路軌上的火車，其在時間 t 小時內所行走的路程 D km 兩個變數 (variable) 之間存在正比例（函數）關係，可以函數式

$$D(t) = 100t$$

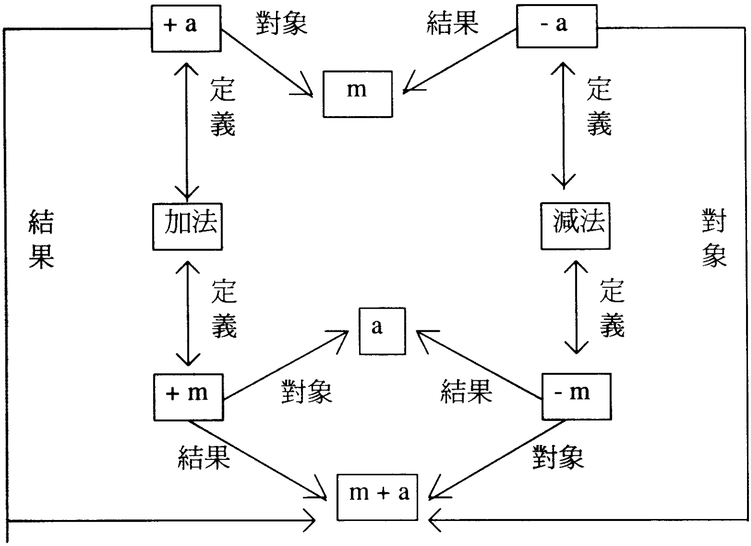
代表。這是一個代數的表象方式。明顯地，用一圖象 (graph) 亦可以表達同樣的關係：



這個直線圖亦是上述函數關係的一種（外在）表象。

至於內在表象，這裏所指的主要是心理表象（ mental representation ，亦有譯作心理表徵），是指學習者頭腦裏面所建立的某種形式的表象，說來有點難以觸摸。由於不可能直接被觀察考查，只能從學習者在處理數學概念、解決數學問題時的種種表現推斷其輪廓。要討論這種內在表象的任何細節，有相當困難，不同心理學派別對此更有不同的理論出發點。有趣的是，當我們要討論學習者對某個

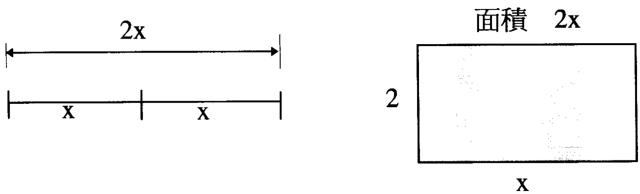
數學概念的內在表象時，我們還得假手於某種「外在」的表象方式來加以描述，否則我們是無從開展討論的。即如下圖所示，用以表達一個學習者對於加減法掌握透徹的有關概念的理解。



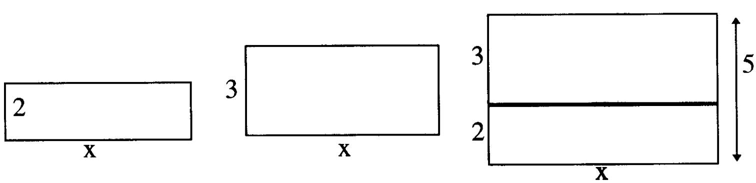
（節譯自： L.B. Resnick, & W.W. Ford (1981). ***The psychology of mathematics for instruction***. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 頁 204 。）

（外在）表象與被表徵之概念或意念之間亦需要區別清楚，前者往往可以起著一種指涉的作用，令學習者（或主體）在思考層面觸發相對應之內在表象從而進行思考活動。當然，一些（外在）表象方式並不單純作爲某種符號記號，其本身亦內蘊著一些操作的可能性，協助主體進行有關之數學思考。例如 $f'(x)$ 或 $\frac{d}{dx}f(x)$ 都是 $f(x)$ 的微分 (derivative) 的記號，但 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的表達式，則更能將這個微分的意念表述出來。但話說回來， $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ 這樣的運算方式，卻又是這個簡單的符號在運算上帶來的方便的可能性。

值得一提的是，在外在表象層面上的操作猶如語法 (syntax)，而其所表徵的意念上的操作則是語意 (semantics)，當然要依靠主體(主觀上)的理解才能達成。現試舉一個簡單的例子，2x 這個代數式，既可以被理解成 $x + x$，又可以是 $2 \cdot x$。前者可以是兩段均為 x 單位長的線段之和，而後者則可以是一長為 2 單位、闊為 x 單位的長方形面積，如下圖所示。



這個 2x 與其表徵意義的區別大概可以類比於語言學家 Noam Chomsky 就句子結構所說的表面結構 (surface structure) 和深層結構 (deep structure) 吧 (見註二)。由此引伸，不難發現在符號操作的過程中，如 $2x + 3x = 5x$，其運算可以純粹按照符號規則進行。也就是說，只消按「語法」行事而不必問其「語意」。當然，對於一個運算者，若他願意，也可以在計算 $2x + 3x = 5x$ 時理解其為代表一 2x 單位長的線段與另一 3x 單位長之線段相加而得一新線段，其長度為 5x 單位。又或者，在他的腦海中，浮現著另一幅圖畫，如下：



這個拼合過程，同樣可以用 $2x + 3x = 5x$ 來表達。

又例如在教導學生求解線性方程 $3x - 4 = 8$ 時，若純以形式運算來說，方程兩邊分別加上 4，得：

$$3x - 4 + 4 = 8 + 4$$

即：

$$3x = 12$$

再每邊除以 3，得： $x = 4$

學生當然可以熟記「移減作加，移乘作除」等「口訣」來進行這類求解過程。但這種純形式的運作，若能配合方程的意義，即此一方程的表達式所表示的對等關係，其中 $3x - 4$ 與 8 是相等的量，猶如天秤的兩邊

要保持平衡一樣，那麼上述的運算操作便在意義層面上得到理解，學習者在賦予意義 (sense-making) 之下進行的運算將會輕鬆靈活得多。故此，相同的外在表象，對不同的學習者，其理解及其內、外表象可以存在著不同程度的差異。

說到這裡，大概你會同意外在表象及其各種操作，能否表達其所指涉的目標概念及其種種運算關係，端視主體的意識中是否建立了相適應的概念理解。如果學習者只能在符號或圖象等外在表象層面上（即相對於語法層面）不斷努力捕捉各種運算、操作的方式、次序、規律，可以想像，在這樣缺乏意義貫通的情況下要掌握有關的運算程序將會是困難重重的。

註釋

註一：就數學上所涉及的表象問題，可參看 Kaput, J.J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In E.A. Silver (Ed.), ***Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*** (pp. 381-398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 及 Janvier, C. (Ed.). (1987). ***Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.*** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 中多篇文章。而在一般心理學上，將外在現實世界的事物，通過各種感觀過程轉化成心理事件、內容，稱爲表象或心理表象。請參閱例如 Solso, R.L. (1995). ***Cognitive psychology*** (4th edition). Boston: Allyn and Bacon.

註二： Noam Chomsky 提出句子的雙重結構理論，將句子的結構分成表層結構和深層結構。句子的表層結構乃指句子的形式，特別與語音相關；而句子的深層結構則指句子所陳述的意義。 Chomsky 的基本想法認爲語言生成過程就是從深層結構到表層結構的一個轉換過程 (transformation)。詳見 Chomsky, N. (1957). ***Syntactic structures.*** The Hague: Mouton. 及 Chomsky, N. (1965). ***Aspect of the theory of syntax.*** Cambridge, MA: The MIT Press.

（下期續）