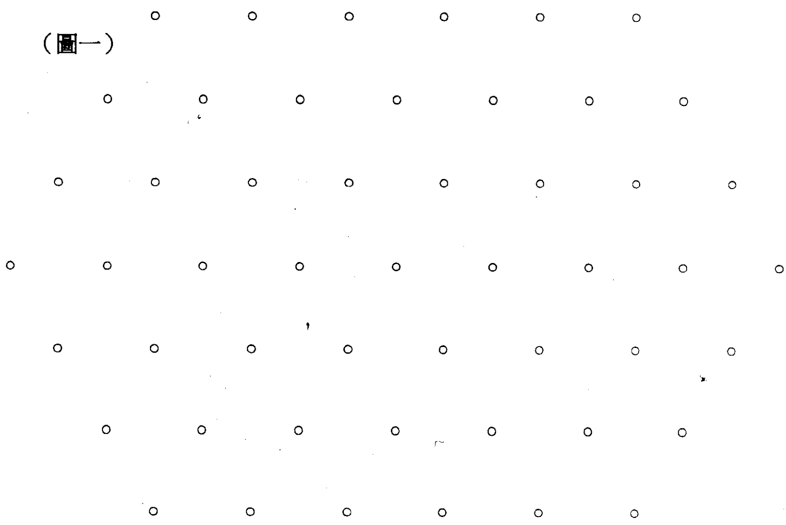
可有想過用等邊三角形格點的釘板？

馮振業 香港教育學院

筆者在上期〈在釘板上可以圍出等邊三角形嗎？〉一文中指出在正方形格點的釘板上是不可能圍出等邊三角形的。接下來的問題自然是「可否把釘板的設計改良至可克服不可能圍出等邊三角形的缺陷？」

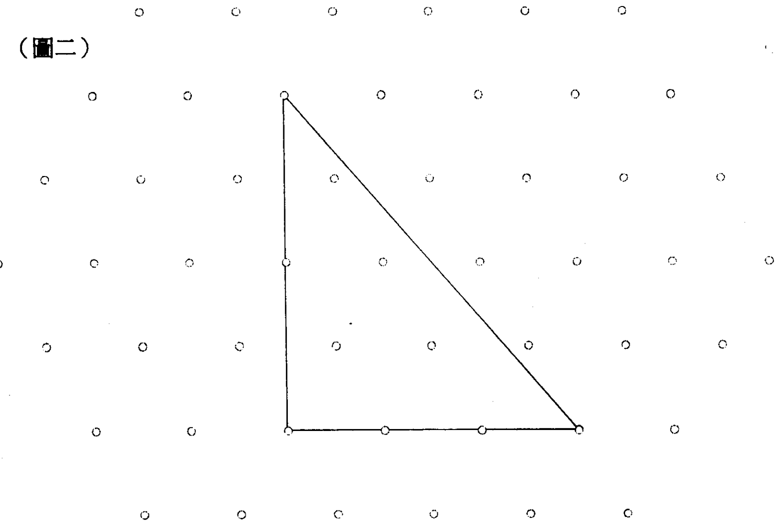
一個順理成章的建議便是把格點的佈置由正方形改成等邊三角形（見圖一）。

（圖一）

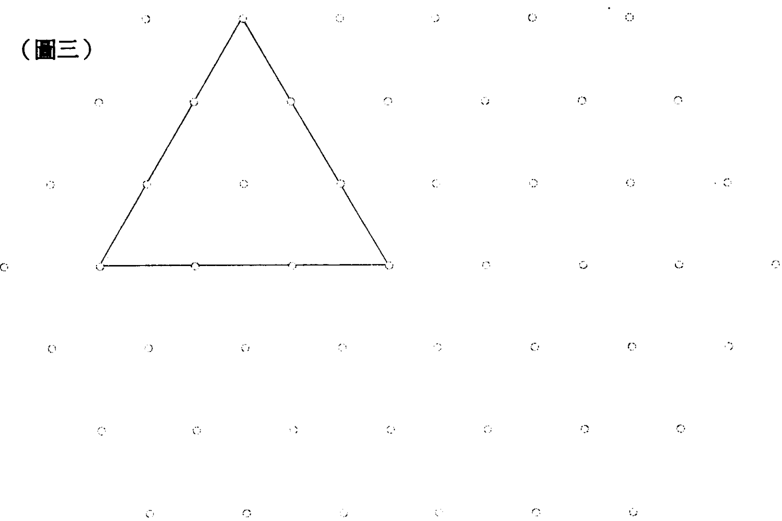


在小學數學課程中，我們會向學生介紹直角、等邊和等腰三角形，也會向學生介紹一些特別的四邊形：鷂形、梯形、平行四邊形、菱形、長方形和正方形。在未決定使用這個新設計的等邊三角形格點的釘板之前，我們必先弄清楚可否用橡皮圈在這個新釘板上圍出上述各種幾何圖形。只要稍作試驗，不難發現除正方形外，其他圖形都不成問題（見圖二至九）。

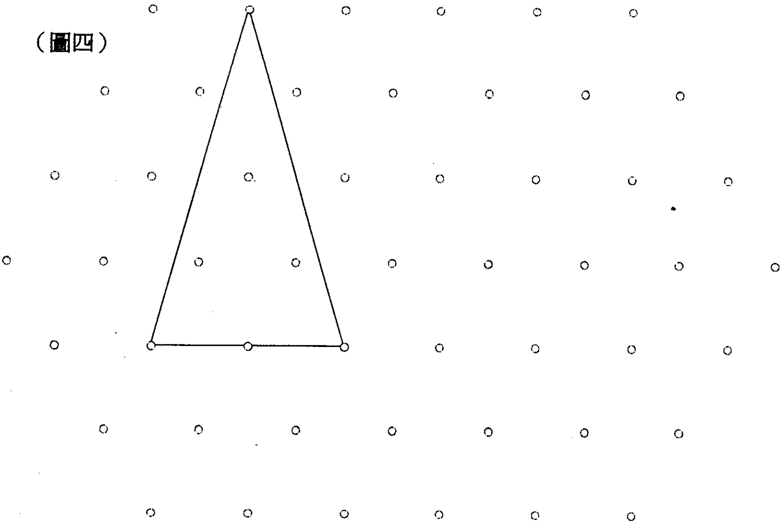
(圖二)



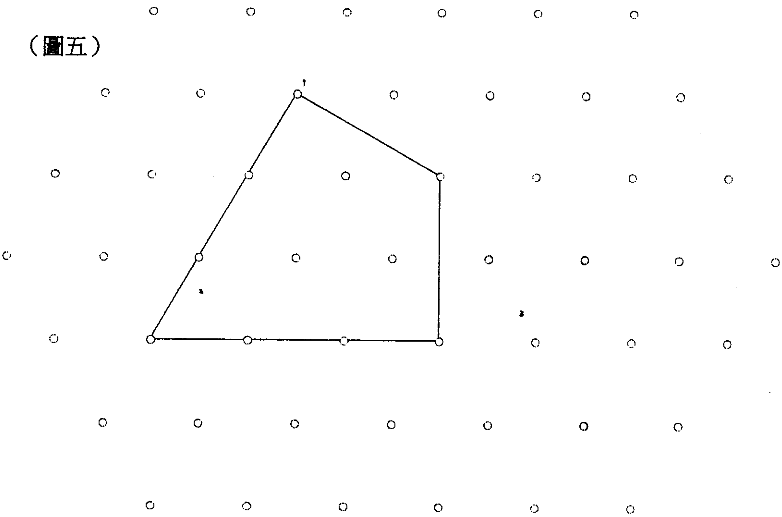
(圖三)



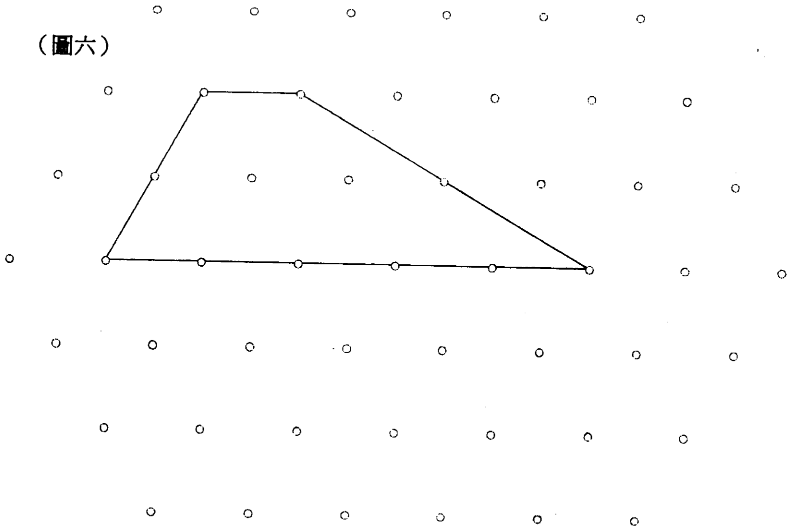
（圖四）



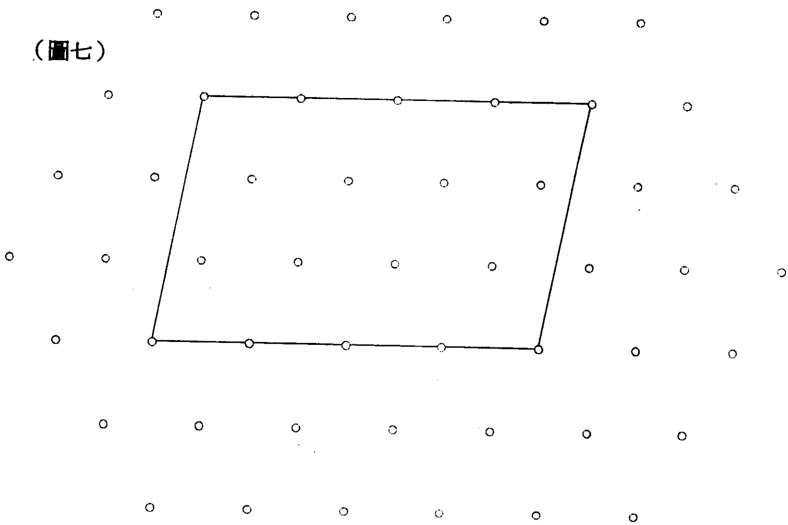
（圖五）



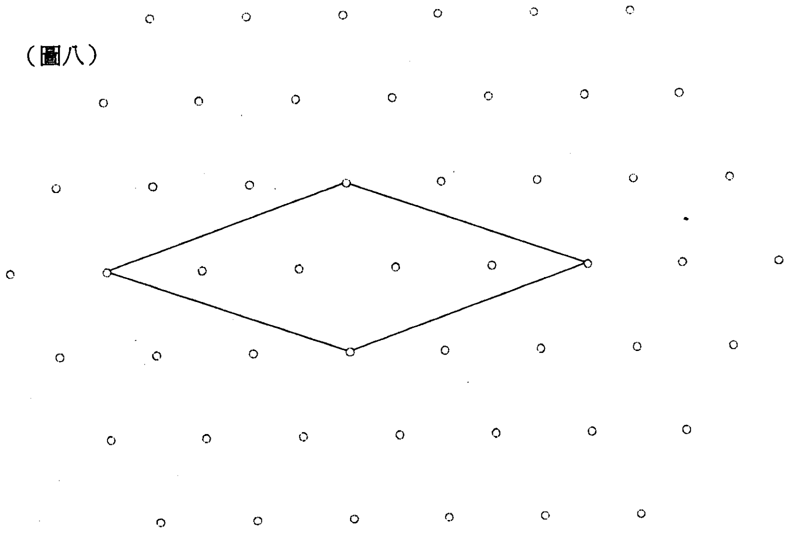
(圖六)



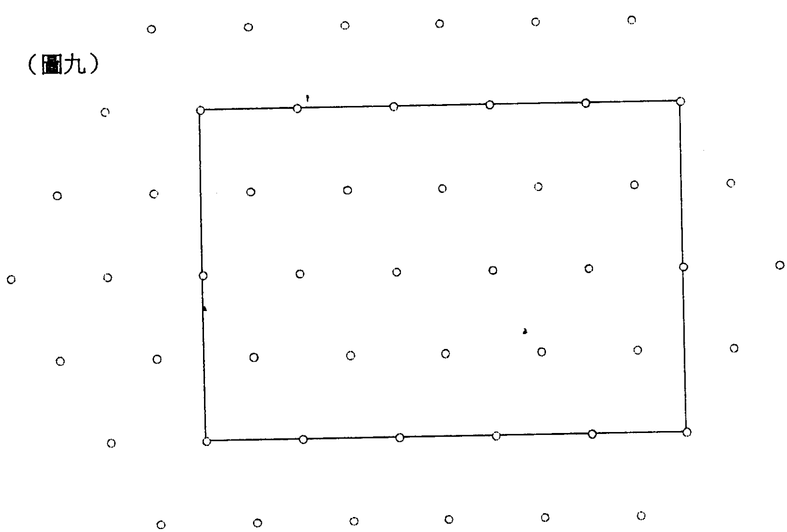
(圖七)



（圖八）

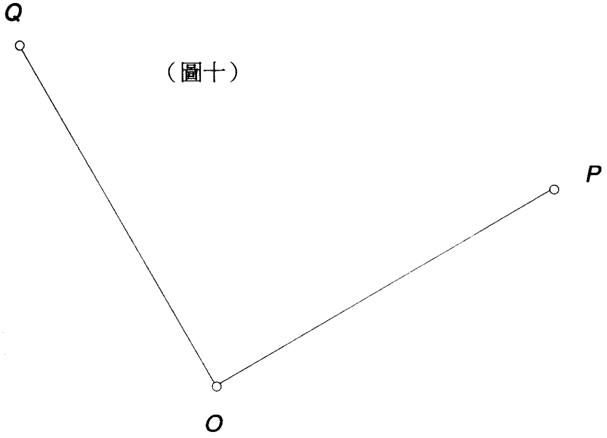


（圖九）



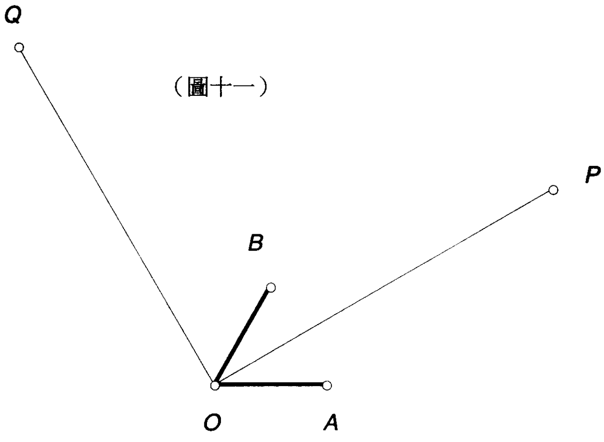
很不幸地，我們是不可能在這樣的釘板上圍出正方形的！以反證法證明如下：

設 OP 和 OQ 爲所圍成的正方形的兩鄰邊（見圖十）。



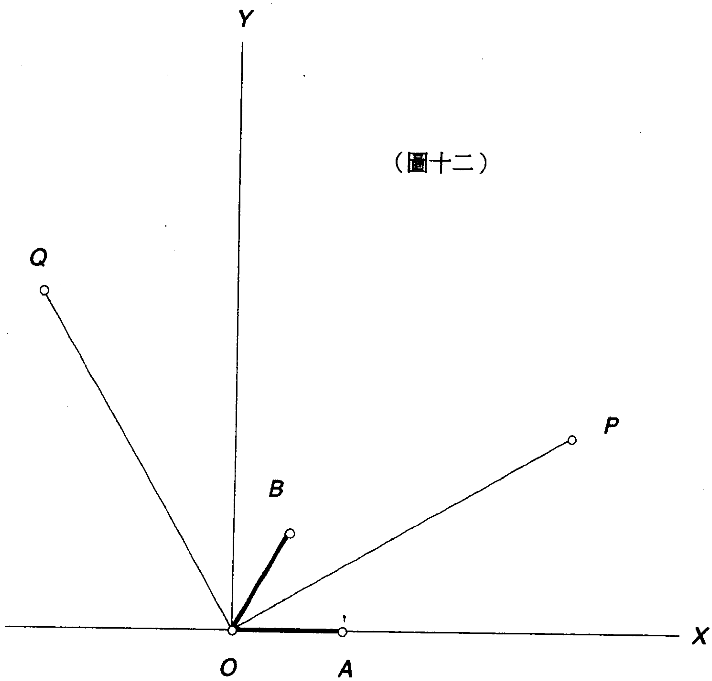
（圖十）

適當地選取與 O 相鄰的兩格點 A 和 B 使 OAB 爲等邊三角形，並有圖十一所示形勢。（ OP 可與 OA 重疊。）



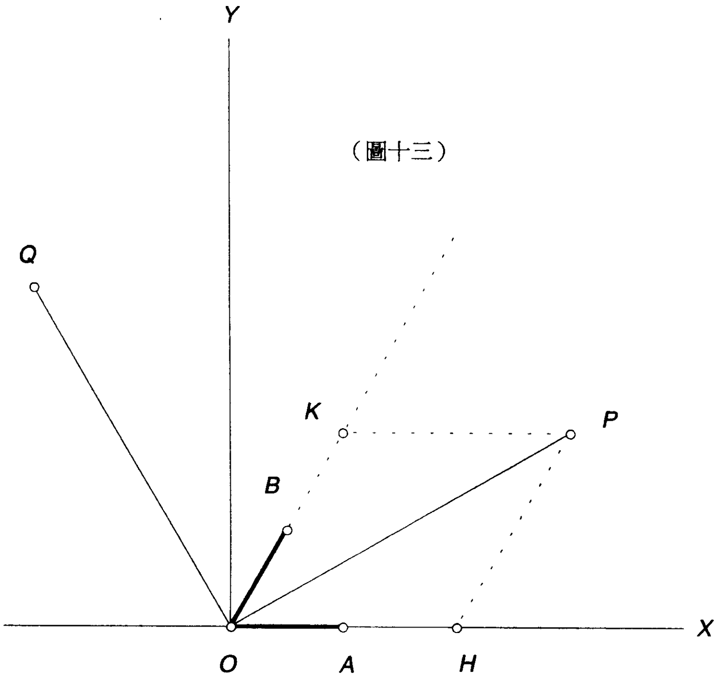
（圖十一）

以 O 為原點，把直角坐標的 X 軸置於 OA 上，再補上 Y 軸（見圖十二），並以 OA 長度為單位長度。



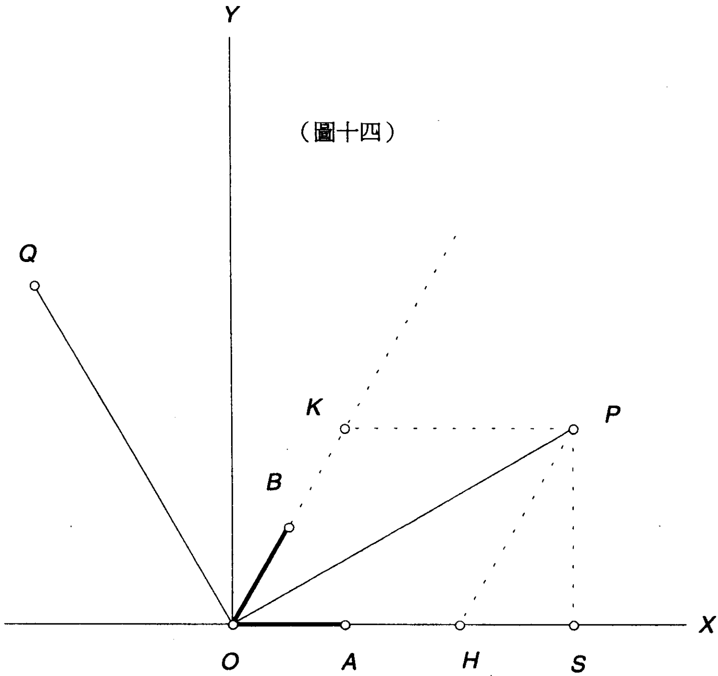
（圖十二）

通過 P 分別作平行 OA 和 OB 的線與 OB 及 OA 延長交於 K 和 H（見圖十三），由於 P 是格點，故 $OH=\alpha$ 和 $OK=\beta$，其中 α 、 β 為非負整數。



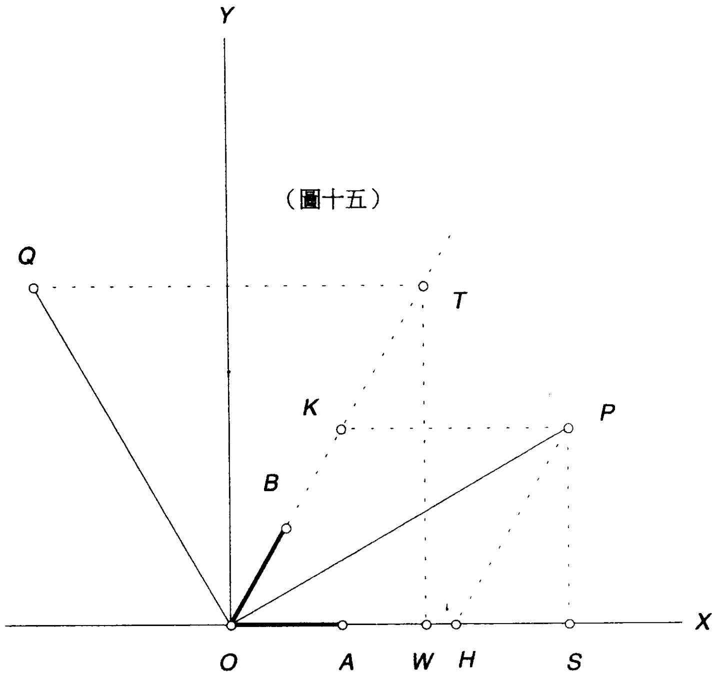
（圖十三）

由 P 作垂線至 X 軸交於 S（見圖十四），則可求得 P 的直角坐標爲 $(\alpha+\frac{\beta}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\beta)$，繼而求得 Q 的直角坐標爲 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta,\alpha+\frac{\beta}{2})$。



（圖十四）

由 Q 作平行於 X 軸的線與 OB 延長交於 T 。 Q 爲格點使 $OT=b$，其中 b 爲正整數。再由 $\angle AOB=60^\circ$ 及 T 至 X 軸的距離（即 TW）爲 $\alpha+\dfrac{\beta}{2}$ 推得 $\dfrac{\alpha+\dfrac{\beta}{2}}{b}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（見圖十五），即 $\sqrt{3}$ 爲有理數的矛盾，故在等邊三角形格點的釘板上是不能圍出正方形的。



（圖十五）

能密鋪平面的正多邊形只有等邊三角形、正方形和正六邊形，我們已知等邊三角形格點和正方形格點的釘板皆有缺陷，那麼，要找沒有缺陷的正多邊形格點的釘板就只能向正六邊形格點的釘板打主意。可惜，正六邊形格點的釘板是由等邊三角形格點的釘板拔去一些格點而得，因此，它必然承襲了等邊三角形格點的釘板的一些缺陷。換言之，這個尋找完美釘板的好夢難完。