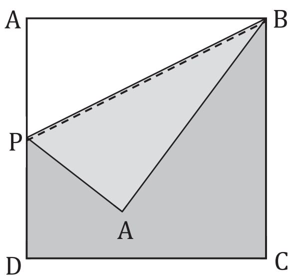
# 教室剪影：摺出畢氏三元數

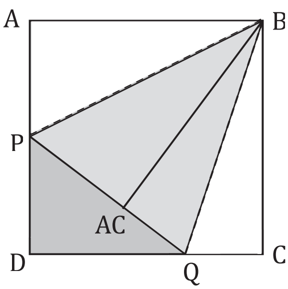
許慧貞
博思會

用一張正方形紙，兩下就可以摺出符合畢氏三元數的三角形，方法如下：




先將正方形的左上角 A 沿虛線 BP 向下摺。

圖 1




再將正方形的右下角C沿虛線 BQ 向上摺，使 A 和 C 重合。

圖 2

設正方形的邊長 = 正實數 a，AP = 正實數 b。

如果 $\frac{b}{a}$ 是一個有理數，那麼 $\triangle PDQ$ 的邊長比例符合畢氏三元數。

以下是三個例子：

**例 1** $a = 6,\ b = 1$

$$5^2 + (6 - x)^2 = (1 + x)^2$$

$$x = \frac{30}{7}$$

$\triangle PDQ$ 的邊長比例

$= \frac{35}{7} : \frac{12}{7} : \frac{37}{7}$

$= 35 : 12 : 37$

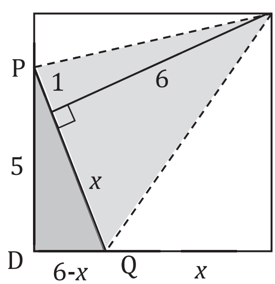



圖 3

**例 2** $a=\frac{6}{5},\ b=\frac{2}{5}$

$$(\tfrac{4}{5})^2+(\tfrac{6}{5}-x)^2=(\tfrac{2}{5}+x)^2$$

$$x=\frac{3}{5}$$

△ $PDQ$ 的邊長比例

$=\frac{4}{5}:\frac{3}{5}:\frac{5}{5}$

$=4:3:5$

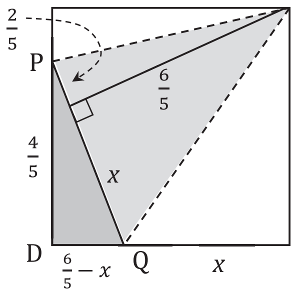



圖 4

**例 3** $a=20\sqrt{3},\quad b=12\sqrt{3}$

$$(8\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3}-x)^2=(12\sqrt{3}+x)^2$$

$$x=5\sqrt{3}$$

△ $PDQ$ 的邊長比例

$=8\sqrt{3}:15\sqrt{3}:17\sqrt{3}$

$=8:15:17$

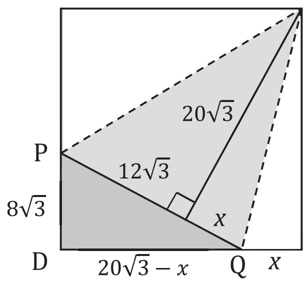



圖 5

**證明**：（參考圖 6）

正方形的邊長 ＝ 正實數 a，AP＝ 正實數 b

設 A 和 C 重合的位置為 M，

$$\angle PBM=\theta,\ \angle QBM=\phi$$

$$\tan\theta=\frac{PM}{MB}=\frac{AP}{AB}=\frac{b}{a}$$

$$\theta+\phi=45^\circ$$

$$\tan\phi=\tan(45^\circ-\theta)$$

$$=\frac{\tan 45^\circ-\tan\theta}{1+\tan 45^\circ\tan\theta}$$

$$=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{a-b}{a+b}$$

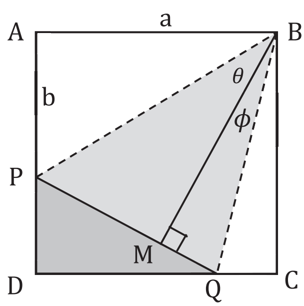



圖 6

$$PM = BM\tan\theta = AB\tan\theta = a\tan\theta = b$$

$$QM = BM\tan\phi = BC\tan\phi = a\tan\phi = \frac{a(a-b)}{a+b}$$

**△ *PDQ* 的邊長：**

$$PD = AD - AP = a - PM = a - b$$

$$QD = CD - QC = a - QM = a - \frac{a(a-b)}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$PQ = PM + QM = b + \frac{a(a-b)}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

**△ *PDQ* 的邊長比例：**

$$PD : QD : PQ \;=\; a-b \;:\; \frac{2ab}{a+b} \;:\; \frac{a^2+b^2}{a+b} \;=\; a^2-b^2 \;:\; 2ab \;:\; a^2+b^2$$

**比例符合畢氏三元數。**

另一方面，如果著眼於圖 6「角」的關係，可以証明△ $PDQ$ 的 $\angle DPQ = 2\theta$ 及 $\angle DQP = 2\phi$ 。（見圖 7）

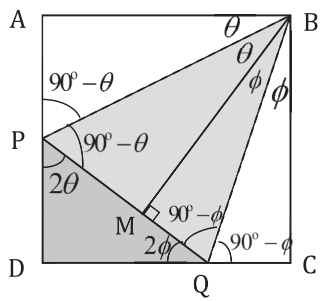



圖 7

我們可以由圖 7 取得靈感，設計一些適合初中學生摺紙及求角的探究活動，讀者們不妨嘗試一下。

作者電郵：estella.hui@pathways.org.hk