數迷朱古力：解難小點

蕭文強
香港大學數學系

我喜愛朱古力（巧克力），尤其是近乎 80% 的黑朱古力。一排 m 行 n 列的朱古力，由 $m-1$ 道橫坑及 $n-1$ 道縱坑分成 mn 個相連的小方塊（以下簡稱作 $m\times n$ 方塊）。十多年前在課堂上我常常借助它討論解難與證明，還有什麼是叫做同構的數學問題。

把一排 $m\times n$ 方塊的朱古力分成 mn 個 1×1 小方塊，每次只能循一道橫坑或者一道縱坑把它掰成兩塊，如此這般做下去，一共要掰開多少次呢？不一定每個人都馬上看出端倪，但每個人都可以察看一些簡單的特殊情況，譬如是 1×5 方塊，或者是 2×3 方塊，或者是 3×3 方塊，不論以任何方式掰開，答案分別總是 4 次、5 次、8 次。於是，一個猜想油然而生，答案是 $mn-1$ 次。果然，只要你注意到關鍵所在，每掰開一次，方塊的數目即添加一。例如掰開第一次，本來只有一塊，變成兩塊；把其中一塊掰開，由兩塊變成三塊。要得到 mn 塊，不就是要掰開 $mn-1$ 次嗎？

讓我們轉去看另一個問題：有 N 隊足球隊參加淘汰賽，沒有和局（必要時加時及互射十二碼，以「即時死亡」方式決定勝負）。一共要作賽多少場，才能產生冠軍呢？這個問題與前面的朱古力問題有何關聯呢？注意到關鍵所在，每一場賽事淘汰一隊。產生冠軍，需要淘汰 $N-1$ 隊，也就是說，一共要作賽 $N-1$ 場。把前面問題的「掰一次增加一塊」換為後一個問題的「作賽一場減少一隊」，便知道二者相同之處了。我們說，這兩個問題是同構（isomorphic）的。舉一個實例，圖 1 顯示掰開 3×3 方塊的一種情況（還有很多其他的可能情況）；圖 2 顯示相應於這種情況的作賽安排。

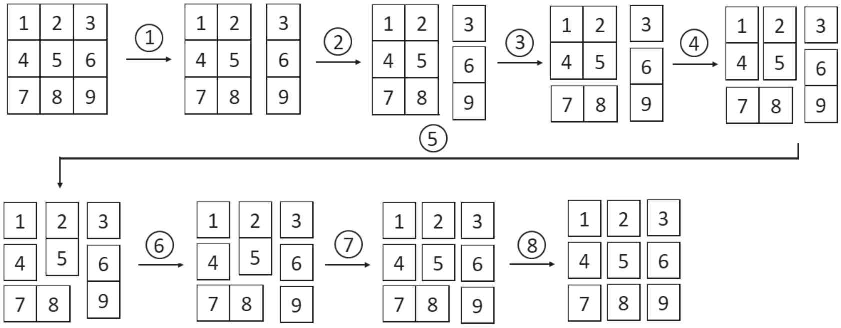

圖 1

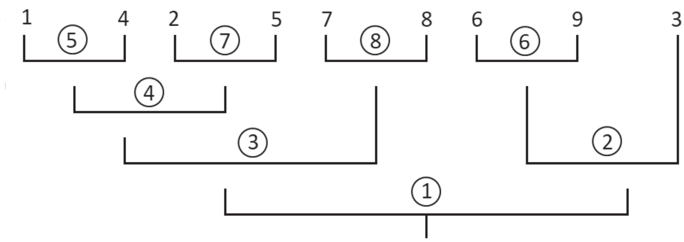

圖 2

從二月初開始，由於疫情影響，居家時間居多，吃多了朱古力！碰到兩人分享一排 $m \times n$ 方塊朱古力的問題。每次只能循一道橫坑或者一道縱坑把它掰成兩塊，取去其中一塊。對方以類似手法處理餘下的另一塊。兩人輪流這樣做下去，直至餘下最後的 1×1 方塊，誰人被迫取去這最後一塊，算是負方。先行者必勝嗎？必負嗎？有沒有必勝的策略呢？

老子《道德經》有句話:「圖難於其易，為大於其細。」先來看看簡單的情況。最簡單的情況莫如 1×1 方塊，先行者 A 必負。其實，如果是 $n \times n$ 方塊，先行者 A 也是必負。無論 A 怎樣把它掰成兩塊，取去其中一塊，對手 B 總可以適當地把另一塊掰成兩塊，取去一塊，使餘下的是 $m \times m$ 方塊。輪到 A 走下一步，如此類推，B 必為勝方（見圖 3）。讓我們把 $n \times n$ 方塊稱為「死角位」，只要迫使對方面對這種「死角位」，你便穩操勝券了。

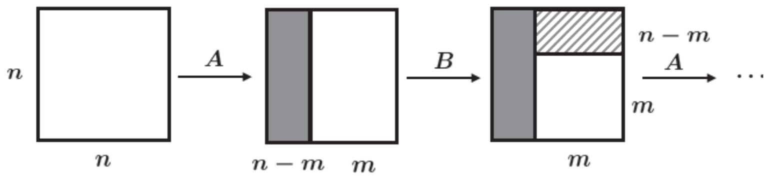

圖 3

如果是 $m \times n$ 方塊，且 m 和 n 不等，不妨設 $m < n$（否則調換行和列的位置），則先行者 A 必勝。因為 A 只用把 $m \times n$ 掰成 $m \times (n-m)$ 方塊及 $m \times m$ 方塊，取去前一塊，餘下 $m \times m$ 方塊讓 B 處理。如前所述，這是「死角位」，B 必負，故 A 必勝。

現在作少許變化，規定掰成兩塊後只能取去較小的一塊，或者當兩塊是同樣大小時，可以任取其一。那麼，情況是否相同呢？固然，如果是 $n \times n$ 方塊，先行者 A 必負，理由如前所述。如果是 $m \times n$ 方塊，且 m 和 n 不等，不妨設 $m < n$，又如何呢？如果是 1×2 方塊，顯然 A 必勝。如果是 1×3 方塊，因為受新增條件限制，先行者 A 不能取去兩塊而餘下 1×1 方塊。A 只能取去一塊，餘下 1×2 方塊，輪到 B 走下一步，取去一塊，餘下 1×1 方塊予 A，故 B 必勝。同樣道理，如果是 1×7 方塊，不論先行者 A 怎樣把它掰成兩塊，取去較少或相同大小的一塊，餘下的那塊只能是 1×4 或 1×5 或 1×6 方塊，輪到 B 走下一步，必定可以把它掰成兩塊，取去一塊，餘下 1×3 方塊予 A，故 B 必勝。類似地，如果是 1×15、1×31、1×63、⋯ 方塊，則 B 必勝。反之，如果是 1×4、1×5、1×6、1×8、1×9、⋯、1×14、1×16、1×17、⋯、1×29、1×30、1×32、1×33、⋯ 方塊，則 A 必勝。

也許你已經見到端倪吧？如果是 2×5、2×11、2×23、⋯ 方塊，則 B 必勝；如果是 2×3、2×4、2×6、2×7、2×8、2×9、2×10、2×12、2×13、⋯、2×22、2×24、⋯ 方塊，則 A 必勝。一般地，如果是 $m \times n$ 方塊（不妨設 $m \leq n$），且 n 形如 $2^k m + 2^k - 1$，k 為非負整數，則先行者 A 必負，反之，則先行者 A 必勝（怎樣得到這個 $2^k m + 2^k - 1$ 呢？）。下面 讓我們證明這項斷言，從證明中描述了必勝策略。

首先，讓我們證明兩件事，關於正整數 m 和 n，n 形如 $2^k m+2^k-1$，k 為非負整數：（1）若 m' 是整數，且 $m>m'\geq m/2$，則 n 不能形如 $2^{k'}m'+2^{k'}-1$，k' 為非負整數；（2）若 n' 是整數，且 $n>n'\geq n/2$，則 n' 不能形如 $2^{k'}m+2^{k'}-1$，k' 為非負整數。二者均不難證明，運用反證法便成。

證明（1）：假設 $n=2^k m+2^k-1=2^{k'}m'+2^{k'}-1$，則 $2^k(m+1)=2^{k'}(m'+1)$，即 $\frac{m+1}{m'+1}=2^{k'-k}$，故 $\frac{m+1}{m'+1}\geq 2$（因為 $k'-k\geq 1$），即 $m+1\geq 2m'+2$。由於已知 $m'\geq m/2$，不可能有 $m+1\geq 2m'+2$，此乃矛盾！

證明（2）：假設 $n'=2^{k'}m+2^{k'}-1$，而且 $n'\geq n/2$，故
$2^{k'+1}m+2^{k'+1}-2\geq n$。由於 $k'<k$（因為 $n=2^k m+2^k-1>n'$），可知 $k'+1\leq k$，故 $2^{k'+1}m+2^{k'+1}-2\leq n-1$。不可能有 $2^{k'+1}m+2^{k'+1}-2\geq n$，此乃矛盾！

現有 $m\times n$ 方塊，不妨設 $m\leq n$，欲證明以下結果：若 $n=2^k m+2^k-1$，k 為非負整數，則先行者必負；反之，則先行者必勝。

先考慮 n 不是形如 $2^k m+2^k-1$ 的情況，設

$$2^k m+2^k-1<\mathrm{n}<2^{k+1}m+2^{k+1}-1\text{。}$$

置 $t=n-(2^k m+2^k-1)$，$n'=n-t$，則 $n'=2^k m+2^k-1$，而且 $n-n'\leq n'$，否則，$n>2n'=2^{k+1}m+2^{k+1}-2$，故 $n\geq 2^{k+1}m+2^{k+1}-1$，與 $n<2^{k+1}m+2^{k+1}-1$ 互相矛盾！因此，先行者 A 可以在第一步把 $m\times n$ 方塊掰成兩塊，取去較小或相等的一塊，餘下 $m\times n'$ 方塊，n' 形如 $2^k m+2^k-1$，k 為非負整數，迫使 B 必負，即 A 必勝。其次考慮 $n=2^k m+2^k-1$ 的情況，無論先行者 A 如何走第一步，餘下讓 B 處理的方塊只能是以下兩種情況：（i）$m'\times n$ 方塊，m' 是整數，且 $m>m'\geq m/2$，（ii）$m\times n'$ 方塊，n' 是整數，且 $n>n'\geq n/2$。從上面的（1）和（2）得知，在（i）的情況，n 不能形如 $2^{k'}m'+2^{k'}-1$，k' 為非負整數；在（ii）的情況，n' 不能形如 $2^{k'}m+2^{k'}-1$，k' 為非負整數。輪到 B 行下一步，必勝，即 A 必負。

概括而言，若 n 不是形如 $2^k m + 2^k - 1$ 的情況，我們可以縮小方塊，迫使對方面對 $m \times n'$ 方塊，且 n' 形如 $2^k m + 2^k - 1$，如此這般縮小下去，縮小至最後「死角位」，對方必負。當你玩這個遊戲時，碰到給定的是 $n \times n$ 方陣，你最好讓對方先行！如果必須由你先行，要麼對方懂得箇中機關，你只好自嘆倒楣；要麼對方猶未洞悉箇中機關，你便得留意是否有機可乘，反敗為勝了！

作者電郵：mathsiu@hku.hk