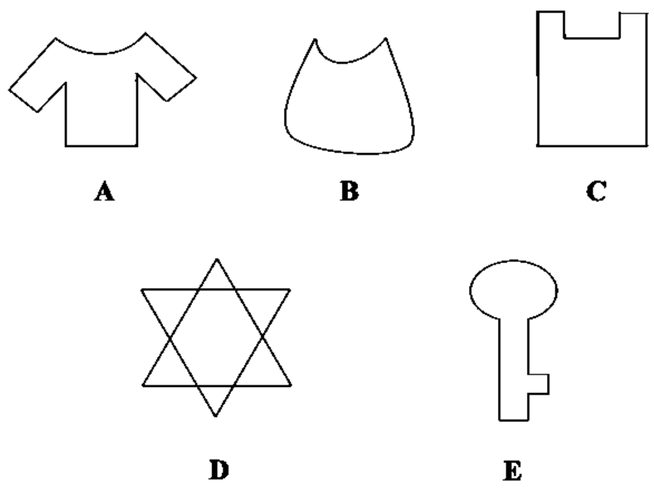
以數學化觀點考慮是非「曲直」

蔡敏英
中華基督教會協和小學（長沙灣）
香巧玲
將軍澳循道衛理小學
馮振業
香港教育學院數學與資訊科技學系

緒論

直線和曲線，是一年級的課程內容（課程發展議會，2000），學習重點包括「認識直線和曲線（頁 22）」、「直觀地辨認直線和曲線（頁 22）」和「用不同方法製作直線和曲線（頁 22）」。依常理看，應該是簡單易明的吧。然而，當大家看過全港性系統評估的考題，或許也會跟筆者等一樣，感到與丈八金剛碰面，全然摸不著頭腦。其中最令人疑惑的，莫過於從來不問一條線是直還是曲！不是說基本能力嗎？「辨別直線、曲線」明列於基本能力重點 KS1-S3-1 之中（香港考試及評核局，2015）。即使沒有，學直線和曲線，最基本，也最應該懂的，不是分辨直線和曲線嗎？考題不問一條線是直線抑或曲線，卻問圖形是否只用直線組成（圖 1：TSA2013-3MC3-36）、只用曲線組成（圖 2：TSA2013-3MC1-33）、或用直線和曲線組成（圖 1：TSA2013-3MC3-36、圖 2：TSA2013-3MC1-33），令人對所學內容更不理解。

36. 觀察下面的平面圖形，寫出所有代表答案的英文字母。



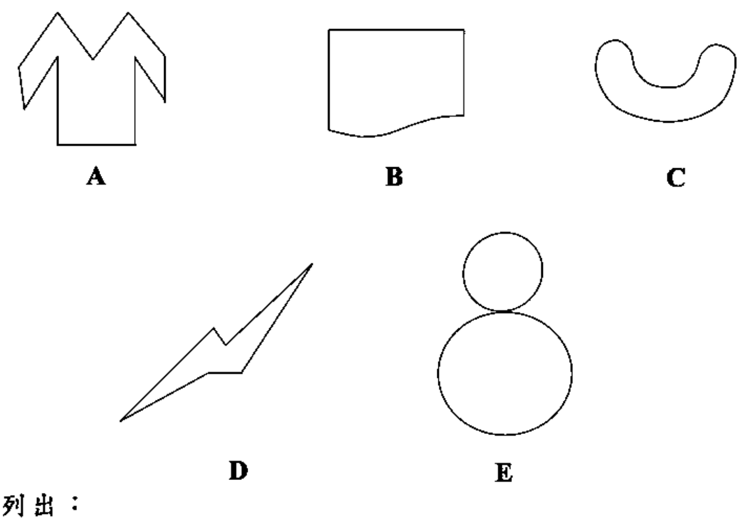
列出：

(a) 只用直線組成的圖形：__________________

(b) 用直線和曲線組成的圖形：__________________

圖 1

33. 觀察下面的平面圖形，寫出所有代表答案的英文字母。



列出：

(a) 只用曲線組成的圖形：________________

(b) 用直線和曲線組成的圖形：______________

圖 2


伴讀書檢生死輪廻案是誰人敢把這天條扞我奉
着玉帝天符非輕慢將是非曲直分明看從頭兒報
應眞希罕這的是天數要循環

圖 3

在未進入學理探討之前，不妨先看中文如何應用「曲」和「直」。詞語「是非曲直」，在《太平御覽》和《太平廣記》中各出現了一次，《朱子語類》中出現了四次（依中國哲學書電子化計劃的搜尋結果 http://ctext.org/song-ming/zh?searchu=是非曲直），在元曲《硃砂擔》中也有出現（圖 3：摘自《續修四庫全書》1760 冊第 676 頁），用法都顯示非「是」即「非」、非「曲」即「直」，絕無中間地帶，更不會模稜兩可！由此可見，在中國文化之內，「直」和「曲」互相對立，不能並存，也不會出現兩者皆不是的情況，跟「是」和「非」的用法一樣，都是按二元邏輯把事物劃分。

儘管在非「曲」即「直」的二元劃分之下，兩者看似對等，在數學領域之內，曲和直的理解卻絕非如此。下文先探討一條線、直線和曲線在數學化觀點下可以如何理解，從而介紹一套可用於香港初小課程的定義，最後討論常見的習題和考題，應如何相應地修訂。

以數學化觀點考慮直線和曲線

考題問圖形是否只用直線組成、只用曲線組成或用直線和曲線組成，學生就得自行把圖形劃分成若干份，然後檢視當中哪些是直線，哪些是曲線，要這樣做必先知道何謂「一條線」？如果學生由生活經驗出發，最自然的理解就是能連在一起的就叫一條。換言之，能一筆畫出來的，就應算作一條線了。前面提及的考題，顯然與此想法相悖。不論圖 1 或圖 2，當中全部圖形均可一筆畫出，也就是一條線，按非「直」即「曲」的文化傳統，除了說是一條曲線，別無選擇。如果不按「一筆畫」理解「一條線」，又沒講授把圖形劃分的原則，任人自由發揮，爭議將無法避免。例如圖 1 的 C 除了擬題者心中的「只用直線組成」，也可依圖 4.1 和圖 4.2 得出兩種不同的結論。圖 4.1 把 C 分為兩部分，其一為直線，另一不能視為直線，

按非「直」即「曲」的文化傳統，就只可列為曲線了；圖 4.2 把 C 分為兩部分，兩者均不能視為直線，按非「直」即「曲」的文化傳統，就只可列為曲線了。有人或許會說 C 分明是由 8 條直線組成，不應硬把不同直線連起作一部分。問題在於，課程指引沒有列出劃分的原則作為學習重點，教師大可不教，也大多沒教，按理學生該大多沒有學。

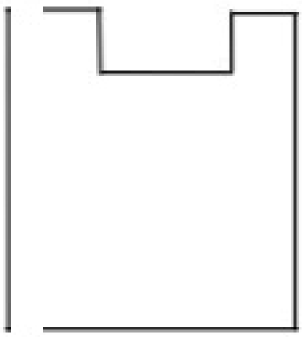


圖 4.1

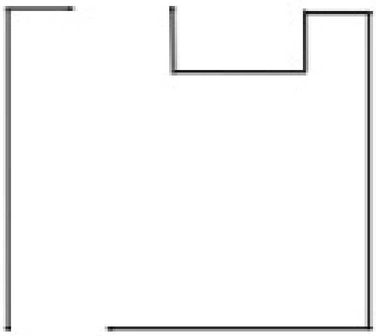


圖 4.2

不要以為三言兩語可以把劃分的原則說得清楚明白，當中涉及如何定義圖形不可分割的組成部分，恐怕有心也不容易辦到。不錯，在數學這門學問之中，我們找到質數作為整數連乘式的不可分割的基本組成部分，使任何大於 1 的整數都可以唯一地寫成質數的連乘式。同樣的工作要在圖形之上完成，卻可以難上千百倍。如果把直線看作最基本，而且是不可分割的組成部分，上述 C 的爭議當可免除。然而，圖 1 的 B 仍然令人費神。若按圖 5.1 劃分，說「B 是用直線和曲線組成」並不過份，卻與由圖 5.2 揭示的「B 是只用曲線組成」的結論大相逕庭！我們面對的困難是：曲的部分不好處理，說不準甚麼是它的不可分割的組成部分。

圖 5.1

圖 5.2

出現不問是「曲」是「直」，卻問由「曲」或「直」組成，很可能源於

兩項執著：其一是對直線的執著；其二是對「圓滑」的執著。前者令人望著圖 6，立即注視兩段連在一起的直線，很想告訴別人，圖形由兩條直線組成。這樣說，遠較說圖 6 是一條曲線來得豐富。後者令人傾向把圖 7.1 看作由兩條曲線組成，因為在 P 點上，左右兩邊雖然連起，但並不圓滑。相反地，圖 7.2 左右兩邊圓滑地在 P 點上連起，令人較易接受圖 7.2 是一條曲線。

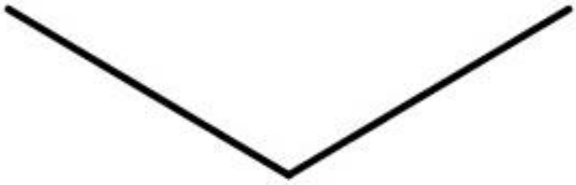


圖 6

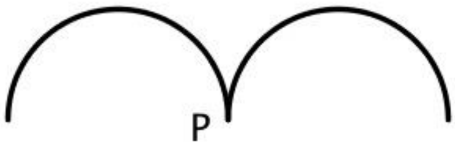


圖 7.1

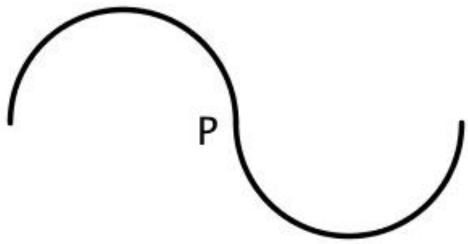


圖 7.2

在著手處理上述困難之前，且讓我們跳進數學中看看。首先，直線遠較非直線容易掌握。在中學階段，藉著直線通過的一點及直線的方向（以斜率或向量定義），就可以完全掌握一條直線。相反地，一條線若非直線，它的變化可以很難捉摸。數學家可以徹底認識直線，卻無法完全掌握曲線。例如，當數學家發現可填滿正方形內部的曲線（見 Apostol, 1974）時，人們認為線應該是條狀而非塊狀的想法便徹底幻滅。因此，數學家慣於由已知測未知，藉容易的東西去了解艱難的東西，故以直線了解曲線是必由之徑。在微積分的討論中，就慣用切線去了解曲線。例如，垂直的概念可由直線推廣至圓滑（可微分）曲線：當兩（可微分）曲線在交點上的切線互相垂直，就稱此兩曲線在交點上互相垂直（見 Apostol, 1967）。在高等數學之內，數學家為圓滑曲線上的每一點定義非負的曲率，曲率愈大，表示曲線愈彎，而直線就是一種非常特殊的曲線，它每一點的曲率都是 0（見 Hass, Weir, & Thomas, 2016）。凡此種種，皆顯示在數學這門學問之內，直線和曲線的地位絕不對等。可以說直線是簡單易明的概念，而曲線卻相對艱深。

學習數學，應以直線為基礎，在非直線的情況，也應注意其中有否直線的部分。

以數學化觀點組織教學，就是要凸顯數學知識產生和演進的過程。其中骨架方案（即主脈絡）特別關注：「（一）主體內容是否遵循由無到有，由粗疏變精密的推演過程？（二）教學發展有否充分照顧學生運用其已建構的知識和技巧，透過具體的科學辯證手法，再創造新數學知識的學習規格？（三）教學軌道是否充分體現數學思想的發展，和具一般性的數學方法？（馮，2004，頁 82）」

要滿足（一），必須先處理看得見的一段直線，因為它最簡單、最特殊，而運用它來描繪現實世界也最粗疏，畢竟看似直的東西，經放大之後也可能是曲的。要滿足（二），就得引入具體的檢測法，令學生有法可依。不單要有直線的檢測法，也得有一條線的檢測法。要滿足（三），就應貫徹以直線為基礎，以直線測曲線的思維方式。

重塑直線和曲線的教學

骨架方案可先以一筆畫引入「一條線」，請學生在白紙上隨便畫一條線，然後又畫另一條線。透過詢問「為甚麼說畫了兩條線」，當可說明以一筆畫定義一條線的合理性。接著檢視不同的線，當中有直有曲，請學生分類或指出最特別的一類，應可把注意力集中在直線之上。教師隨即介紹拔河比賽，未開始時繩子是軟放的，看見是彎彎曲曲的，稱為「曲線」；當拔河開始，雙方健兒就會把繩子拉緊，看見是直的，稱為「直線」。由此，就可得出直線的檢測法：能與拉緊的繩子完全重疊的稱為直線。沿用非直則曲的想法，不能與拉緊的繩子完全重疊的就稱為曲線。有了這樣的理解，學生當可自行檢測一條線是直是曲，亦可驗出日常可以用來繪畫直線的物件（直尺、書簿的邊等等），製作直線和曲線也不會遇上困難了。

值得補充的是，一年級學生對圖形的理解應該簡單直接，不能包括看不到的部分，也不可能以從屬關係看待外貌不同的東西。因此，直線的意義暫時只等同一段直線，與中學階段的包含看不見的兩端延長部分不同。圖 8 應看作有兩條直線，只是它們卻是一條更長的直線的一部分。沿用這種理解，衍生兩條直線互相平行的意思就是「無論直線兩端怎樣延長，兩線也不會相交」。至於數學家把直線看作曲線的特類的舉措，為外貌不同的

直線和曲線建立從屬關係，與學生幾何思維發展相悖（詳見 Fuys, Geddes, & Tischler, 1988），不宜採用。

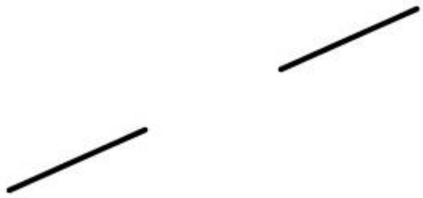


圖 8

習題、考題和評改的革新

根據上述的骨架方案，直線和曲線的習題大概可分為以下題型，而各題目示例僅屬舉隅：

題型一：觀察一圖形，找出它有多少條線

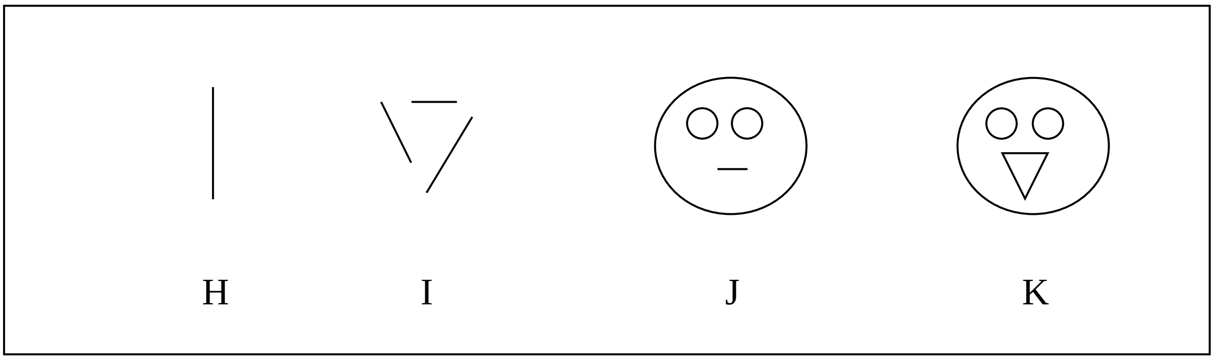


圖 9

面對這類題目時，學生是以一筆畫來定義一條線，得出 H 是 1 條線；I 有 3 條線；J 和 K 都有 4 條線。值得一提的是，擬題時，筆者等建議不應出現類似圖 10 的圖形讓學生判別，原因是依不同的起始點，會得出兩種不同的結果，如依圖 10.1 的圓點為起始點就有 1 條線，依圖 10.2 的則有 2 條線。

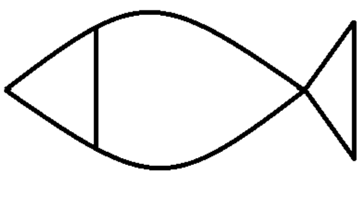


圖 10

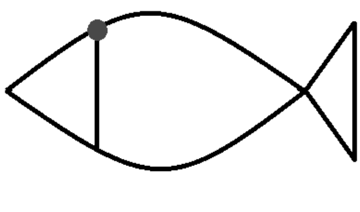


圖 10.1

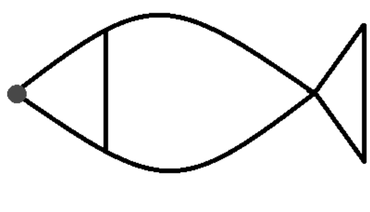


圖 10.2

$\boxed{\text{題型二}}$：觀察（一筆畫的）一條線，辨別它是直線還是曲線

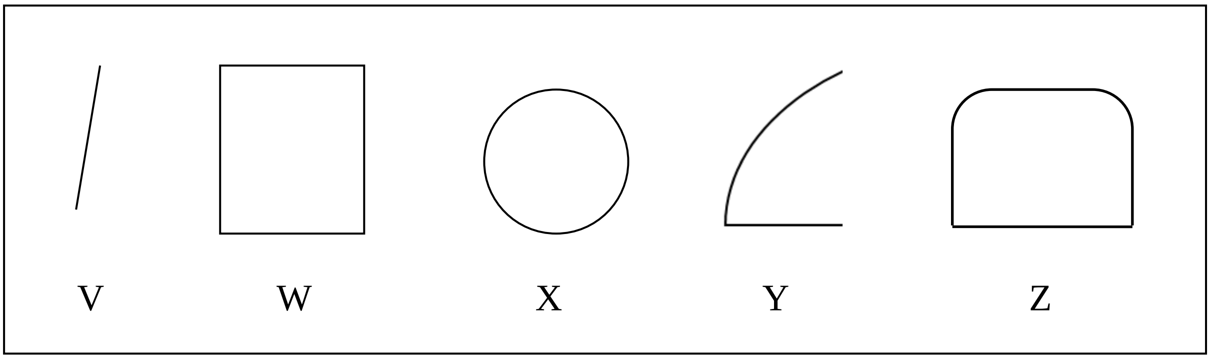


圖 11

要解答這類題目，學生要利用拉緊的繩子（或其他通過直線檢測法的物件，如直尺、書簿的邊等）來檢測一條線是直是曲。上述只有 V 能與拉緊的繩子完全重疊，故它是一條直線，而其他卻不是。

$\boxed{\text{題型三}}$：觀察一圖形，把它的（極大）直線部分填上顏色

在數學上，線是由「點」組成，相連起來時，它可以是直或曲的。直線是指「點」向著一個方向及其相反方向移動所形成的軌跡。曲線只是連在一起的一些點，無特別規限。因此，圖形中的直線部分，更準確的說法是圖形中的「極大直線部分」，它滿足三個條件：首先，它是圖形的一部分；其次，這部分連成一條直線；最後，不論再加入任何其他圖形上的點，都會令這些點不再連成一條直線。

按相同的想法定義圖形的「極大曲線部分」，它便得滿足三個條件：首先，它是圖形的一部分；其次，這部分連成一條曲線；最後，不論再加入任何其他圖形上的點，都會令這些點不再連成一條曲線。如果圖形本身就是一條曲線，不論選了哪個相連的部分，只要不是整個圖形，便都可以加入其他相連的部分，使所有的點依舊連成一條曲線。加上直線不會含曲線部分，定義圖形的「極大曲線部分」意義不大，因為任何曲線的「極大曲線部分」就只有它自己，研究曲線由哪些曲線組成，只會掉入邏輯的死胡同！。

用了「能與拉緊的繩子完全重疊」作為直線的定義之後，曲線的極大直線部分是良定義的。透過實作檢測，學生很容易就可找到曲線中的（極

大）直線部分，不存在歧義。若學生把圖 11 的（極大）直線部分填上顏色，他們應以不同的顏色來表示不同的（極大）直線部分，即如圖 12 所示，當中以不同粗幼的實線表示各個（極大）直線部分，以虛線表示非直線部分。

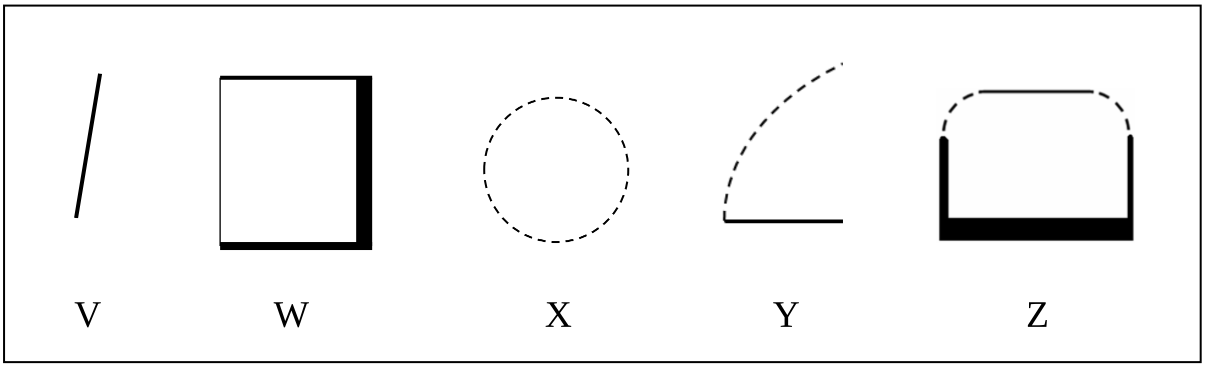


圖 12

題型四：觀察一圖形，找出它有多少個（極大）直線部分

處理這類題目手法，與題型三的大致相同。由於 V 本身就是直線，所以它的極大直線部分就只有它自己，即 V 有 1 個極大直線部分；X 完全不含直線部分，即 X 有 0 個極大直線部分；Y 有 1 個極大直線部分；W 和 Z 就各有 4 個不同的極大直線部分。

補充一點，擬題時，在「一筆畫」的情況下，不應提問圖形有多少個曲線部分，原因正如上文提及的，曲線部分欠缺清楚定義。

題型五：觀察一含有（極大）直線部分的圖形，辨別它是否全由直線組成

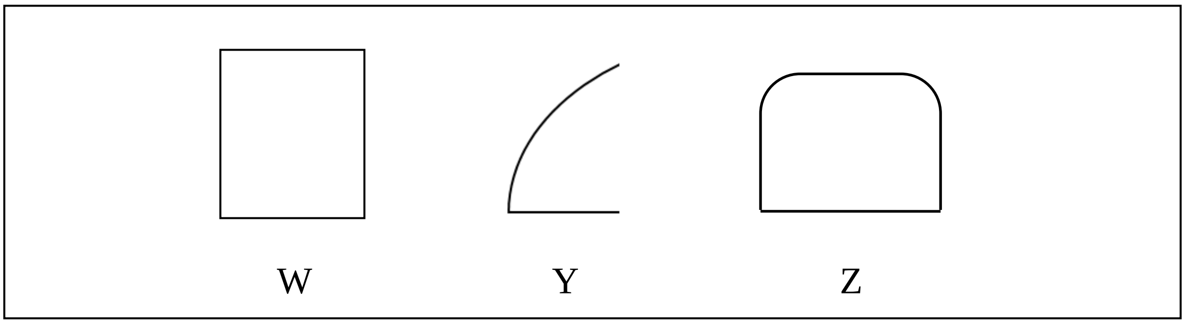


圖 13

作答這類題目時，學生要先透過直線檢測法找出圖形中的（極大）直線部分後，觀察圖形的各部分是否全由直線組成，得出 W 是全由直線組成

的，Y 和 Z 有直線部分，卻不是全由直線組成的。

一個圖形可以全由直線部分組成，當中每個直線部分都有清楚定義；但不能說一個圖形由直線部分和曲線部分組成，因後者無法清楚定義。同理，也不能說一個圖形全由曲線部分組成。

值得注意的是，題型一至五的設問都是針對「圖形」，若把「圖形」改為「英文字母」、「中文字」或「數字」都是可行的，但需留意「字」的不同的寫法，會得出不同的答案。以數字「2」為例，常見的有圖 14.1 或圖 14.2 的寫法。因此，擬題時，必須附上「圖」，不可任由學生自行想像。

圖 14.1

圖 14.2

$\boxed{\text{題型六}}$：沿著哪些物件的邊，可畫出直線

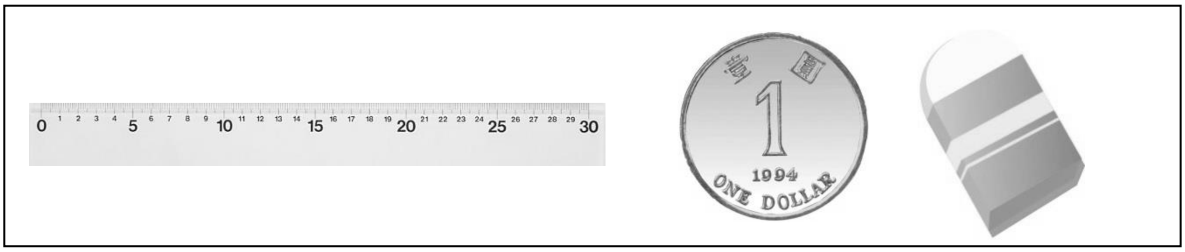
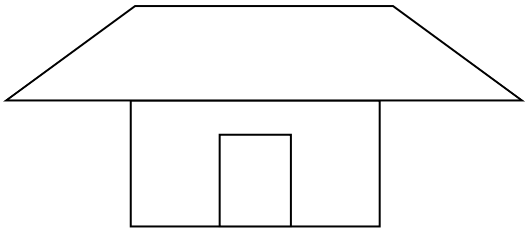


圖 15

圖 15 中，直尺的四邊都可畫出直線，一元硬幣不可畫出直線，使用過的橡皮擦的其中三邊可畫出直線。

題型七：設計一個全由直線組成的圖形



（以上是其中一個可接受的答案。）

圖 16

不難發現，上述題目沒有規限直線的數量。如果要加設限制，也是可以的，但必須以（極大）直線部分的角度來理解，否則爭議將持續存在。以圖 16 為例，它由 10 條直線組成。更準確的說法，它由 10 個（極大）直線部分組成。

題型八：畫出指定數量的直線

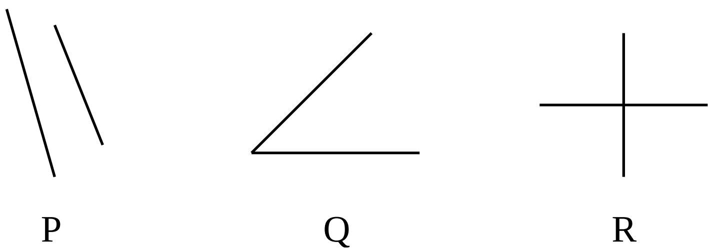


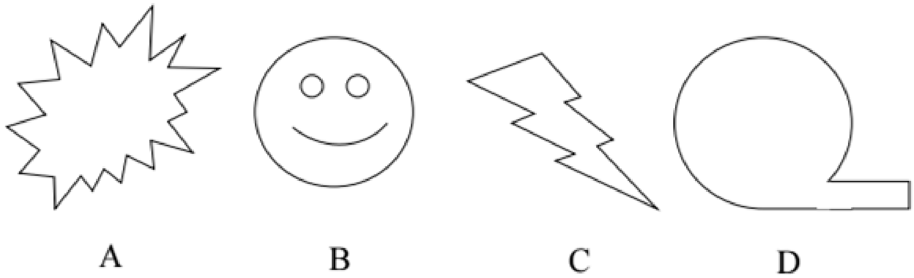
圖 17

若題目要求學生畫出 2 條直線，又沒有特別指出該 2 條直線不可相交的話，P、Q 和 R 都是可接受的答案。補充一點，評改這類題目時，由於無法知道學生的作答過程，只要學生的答案能顯示出只有 2 個（極大）直線部分都應接受。

值得留意的是，以上各題型的問法，均是以直線為基礎，學生能以具一般性的方法找出答案，沒多少爭議的空間。在曲線的情況下，也會提問它有否有直線的部分，詳見附頁一。

以下嘗試修改全港性系統評估的一些考題（圖 18：TSA2014-6M3-32，TSA2014-6M4-31、圖 19：TSA2011-3M3-34、圖 2：TSA2013-3MC1-33），以配合革新的方向。

32.



(a) 以上哪個/些平面圖形只由曲線組成？

答案：__________________

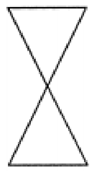
(b) 以上哪個/些平面圖形只由直線組成？

答案：__________________

圖 18

34. 觀察下面各平面圖形。

(a) 下圖中有 * 直線 / 曲線 / 平行線 / 垂直線。
（*圈出所有答案）



(b) 下圖中有 * 直線 / 曲線 / 平行線 / 垂直線。
（*圈出所有答案）

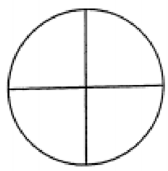


圖 19

在圖 18 中，選項 A、C、D 均能一筆畫出，只有選項 B 不能一筆畫出。依上文題型一，可改成：

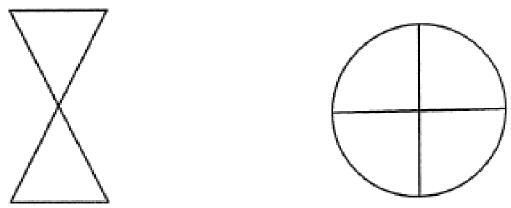
列出：

只有一條線的圖：________________

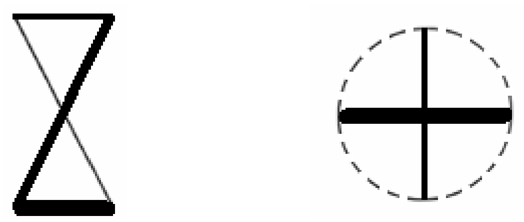
答案：A，C，D

在圖 19 中，(a)圖是全由直線組成，(b)圖有直線部分，卻不是全由直線組成。依上文題型三，可改成：

把下列兩個圖形的各個直線部分，分別填上不同的顏色。



答案：



（以不同粗幼的實線表示需要填色的部分）

圖 20

在圖 2 中，全部的圖形可分為三類，分別是完全不含直線部分的；全由直線組成的；有直線部分，卻不是全由直線組成的。因此，可改成：

列出：

(a) 沒有直線的圖形：________________

(b) 只由直線組成的圖形：：________________

(c) 有直線，但不只由直線組成的圖形：________________

答案：(a) A，C，E

(b) A，D

(c) B

結語

直線和曲線看似簡單，卻包含了不少學問。本文以一筆畫來定義一條線是最易明的。直線和曲線的重要性和難易度並不對等，由於直線是淺易的，學習應以直線為基礎，以貫徹「由直測曲」的數學思維方式。

參考資料

《續修四庫全書》編纂委員會（1995）。《續修四庫全書 1760 冊》。上海：古籍出版社。

香港考試及評核局（2011）。《2011 年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 3MC3》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2011priPaper/P3Math/2011_TSA_3MC3.pdf

香港考試及評核局（2013）。《2013 年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 3MC1》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2013priPaper/P3Math/2013_TSA_3MC1.pdf

香港考試及評核局（2013）。《2013 年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 3MC3》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2013priPaper/P3Math/2013_TSA_3MC3.pdf

香港考試及評核局（2014）。《2014 年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 6MC3》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2014priPaper/P6Math/TSA2014_6MC3.pdf

香港考試及評核局（2014）。《2014 年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 6MC4》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2014priPaper/P6Math/TSA2014_6MC4.pdf

香港考試及評核局（2015）。《數學課程第一、二學習階段終結的基本能力（試用稿）》。於 2015 年 7 月 20 日，下載自 http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/TSA/en/2015QuickGuidePri/QG_P_BC_M.pdf

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

馮振業（2004）。數學化教學：理論、實踐與前瞻。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育會議─2004 論文集》（頁 78–88）。香港：香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 21–36)。香港：香港數學教育學會。）

Apostol, T. M. (1967). *Calculus (2nd edition)*. New York: Wiley.

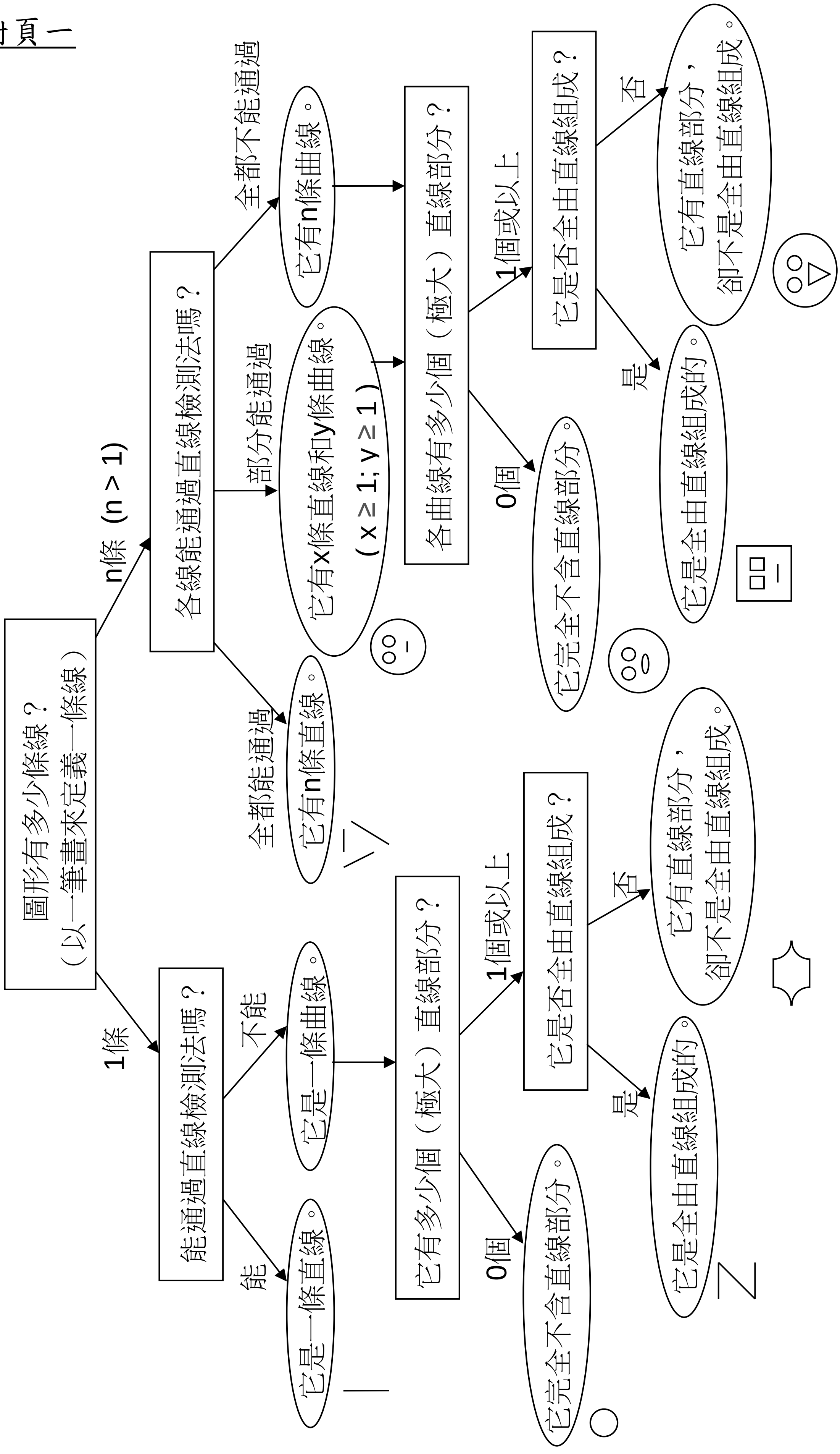
Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis (2nd edition)*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds.) (1988). *The Van Hiele model of thinking in* *geometry among adolescents*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hass, J., Weir, M. D., & Thomas, G. B. Jr. (2016). *University Calculus: Early transcendentals (3rd edition)*. Boston: Pearson.

首作者電郵：tsoimanying@gmail.com

附頁一


圖形有多少條線？
（以一筆畫來定義一條線）
n條（n > 1）
各線能通過直線檢測法嗎？
全都不能通過
它有n條曲線。
部分能通過
它有x條直線和y條曲線。
（x ≥ 1; y ≥ 1）
全都能通過
它有n條直線。
各曲線有多少個（極大）直線部分？
1個或以上
它是否全由直線組成？
否
它有直線部分，
卻不是全由直線組成。
是
它是全由直線組成的。
0個
它完全不含直線部分。
1條
能通過直線檢測法嗎？
不能
它是一條曲線。
能
它是一條直線。
它有多少個（極大）直線部分？
1個或以上
它是否全由直線組成？
否
它有直線部分，
卻不是全由直線組成。
是
它是全由直線組成的。
0個
它完全不含直線部分。