杵臼關節、阿基米德、多面體[8]

蕭文強
香港大學數學系

1. 中國數學家華羅庚說過這樣一段話：

「宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之變、
生物之謎、日用之繁、無處不用數學。」

(《華羅庚科普著作選集》，上海教育出版社，1984；原刊於 1959 年 5 月 28 日《人民日報》)。讓我就以一個數學應用例子來開始。

1981 年春某天，一位香港大學醫學院的同事向我們提出他在醫學實驗當中碰到的一個數學問題。這個問題和它的解決方法，且聽我慢慢道來。

動物的骨骼關節有好幾類，其中一類叫做杵臼關節（ball-and-socket）。杵凸出的部分和臼凹入的部分並非完全吻合，唯其如此，杵臼關節才能較好承受應力。但杵臼之間不時磨擦卻促使兩者的形狀漸趨吻合，幸好關節的正常生長又抵消了這種吻合現象，這個此消彼長的過程在醫學上叫做重模過程（remodelling process）。那位醫學院同事的研究項目，就是探討外力對關節重模過程的影響。了解這個情況，對於醫療步驟而言是有用的。

實驗是要計算受不同程度外力的杵臼接觸部分的面積。在實驗過程中，把關節剖開，把臼部分拍照，利用一種染色技巧，把杵臼的接觸部分區別，在照片上顯現。如果要計算照片上著色區域的面積，那還好辦，打方格便成了（見圖 1）。數一數著色區域佔多少方格，就能估計面積。方格分得越細，估計值越準確。

---

8 二十年前香港大學數學系創辦每年一度的普及數學講座系列『數趣漫話』，第一講由梁鑑添博士主講「350 年懸案：費馬最後大定理」(1994 年 3 月 12 日)，接着是這一講（1994 年 3 月 26 日)。當年中學的普及數學活動極少，每次講座都吸引了數百名師生來參加。際此『數趣漫話』二十週年，把這一講的文本刊於 *EduMath*，讓多一些中小學師生可以讀到，有些教師或者可以從中想到更好的教學活動，固我所願也。此文本在 2004 年曾獲香港大學資助刊印成小冊，免費派發予中學師生。近年小冊已經派罄，不再重印。得到香港大學慨允把稍加修訂的文本在 *EduMath* 刊載，謹此致謝。

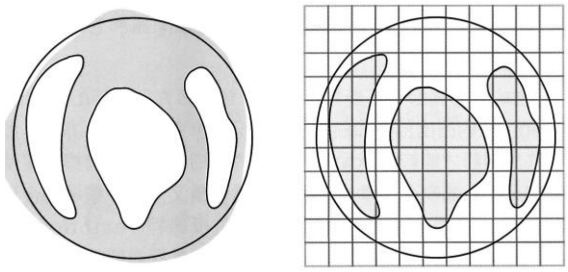


圖 1

那位同事碰到的困難是什麼呢? 照片只是平面投影，他真正要計算的部分卻是個曲面（見圖 2）。為了作近似計算，不妨假設骨臼是個半圓球，它的橫截面照片是半圓球面的投影，是一個圓。圓內某些區域著了色，那是半圓球面上著了色的區域的投影。數學問題是：怎樣從圓內著色的區域推算半圓球面上相應區域的面積呢?

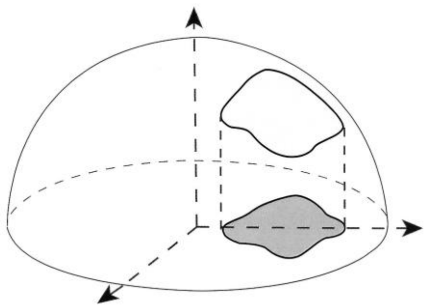


圖 2

數學提供了解決這種問題的理論工具：高等微積分的曲面積分（surface integral），這屬於大學一年級的數學課程範圍。但是，隨意給出圓內某個區域，它可能難以用數學公式刻畫，怎麼計算它上面的曲面積分呢？那位醫學院同事也不一定熟悉高等微積分，他要求的是一種既簡單又可以自己動手量度的方法，於是向我們提出這個問題。

大家來想一下計算平面區域面積的方法，為什麼打方格這辦法行得通呢？關鍵在於每一個方格的面積是相等的。估計圖形所佔方格的數目，乘以每格面積，就得到答案了。怎樣在曲面上做類似的事情呢? 請注意，我們看到的不是曲面而是它的平面投影的照片，只能把照片上的區域分成小部分，於是自然地提出以下的問題：怎樣把照片劃成小部分，每部分相應的曲面的面積都是相等的？如果能這樣做，就能估計曲面上區域的面積了。既然平面上的方格那麼有用，把它們返投影回到曲面上的小格，問題

就解決了嗎？可惜答案是：不！平面上的方格是等面積的，把它們返投影回到球面上的小格卻不再是等面積的。位於中心附近的一格相應的曲面面積，比起位於圓周附近一格相應的曲面面積是小了（見圖 3）。

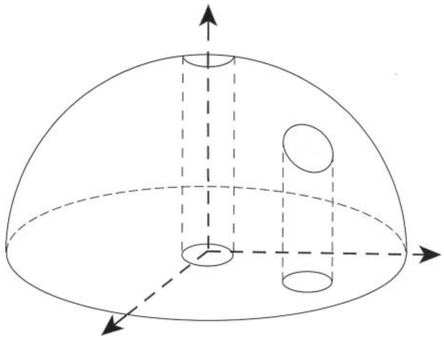


圖 3

不難看到，如果我們畫一組等分圓周的半徑，由這些線段組成的扇形在曲面上的相應面積是相等的。如果我們能夠再適當地畫一組同心圓，把這些扇形分為小部分，使曲面上的相應面積相等，問題不是解決了嗎（見圖 4）？

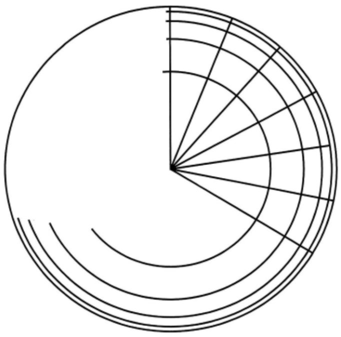


圖 4

我帶著問題回到家，它一直在腦子裏盤旋。晚飯後我跟一歲半的兒子玩耍，他正在把弄一件玩具，是一個由一組顏色不同厚度相等的球台合拼而成的圓球（見圖 5）。瞠著那件玩具，我忽地靈機一動，想到了關鍵的問題！那套球台的厚度兩兩相等，它們的側面積是否也兩兩相等呢？如果的確相等，把球台投影到通過球中心的平面，就得到所需的同心圓了。待兒子睡著後我連忙拿紙筆算一算，果然不出所料，一個圓球上的兩個球台只要厚度相等，它們的側面積也相等。我再翻查數學手冊，證實我的計算無誤。手冊上寫著，從半徑是 R 的圓球截取一個厚度是 H 的球台，它的側面積是 $2\pi RH$（見圖 6）。特別地，一個圓球上的兩個具相同 H 的球台有相等

的側面積。

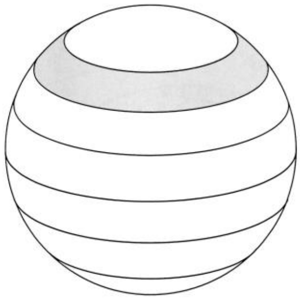


圖 5

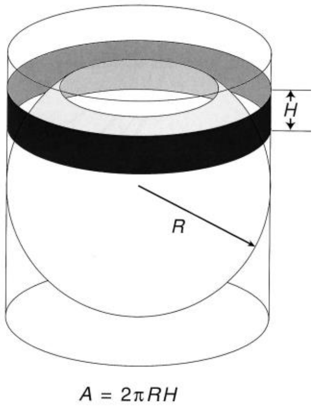


圖 6

利用球台側面積的性質，我們懂得如何把圓劃分，使每小部分相應的曲面面積相等，如圖所示（見圖 7）。數一數著色區域佔多少部分便能估計半圓球上著色區域的面積。由於那組同心圓在平面上不是均勻的，把劃分加細時必須作出適當處理，其中的技術細節，就從略了。

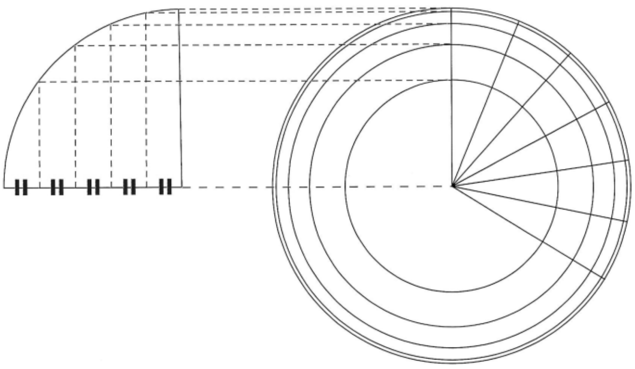
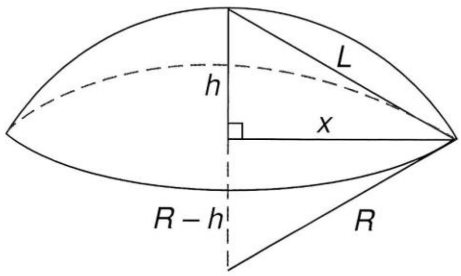


圖 7

2. 雖然杵臼關節的問題告一段落，我意猶未盡，因為球台側面積的公式很有意思，十分漂亮卻不明顯。如此優美的公式，前人是怎樣發現的呢？

為求進一步了解這個問題，我翻閱書本，尤其是古代希臘的數學文獻，因為在那個時代，幾何發展尤其蓬勃。果然，我在阿基米德（Archimedes，公元前 287 年至公元前 212 年）的著述《圓球與圓柱》（On the sphere and cylinder）裏面找到了解釋。阿基米德考慮的是整個圓球的表面積 A，以今天的表達方式，答案是 $A=4\pi R^2$（ R 是圓球的半徑），這是書中第三十三條定理的內容。他也考慮球冠的表面積，答案就是由頂點至邊緣的線段作為

半徑的圓的面積，$A = \pi L^2 = 2\pi Rh$（由於 $L^2 = 2Rh$，h 是球冠的高)，這是書中第四十二條定理的內容（見圖 8）。一個球台可以看成是從一個大球冠減去一個小球冠，假設大球冠的高是 h_1，小球冠的高是 h_2，那麼球台的側面積是 $A = 2\pi Rh_1 - 2\pi Rh_2 = 2\pi R(h_1 - h_2) = 2\pi RH$，其中 H 是球台的厚度。



$$L^2 = h^2 + x^2$$
$$x^2 = R^2 - (R-h)^2$$
$$\therefore L^2 = h^2 + R^2 - (R-h)^2$$
$$= 2Rh$$

圖 8

阿基米德運用「窮竭法」（method of exhaustion）來證明這些定理，內裏蘊含後世微積分的極限（limits）思想，在這兒不岔開話題了，不如讓我用現代數學語言來解釋球台側面積的公式吧。

一個球台可以看成是由眾多層截頭圓錐體近似地組成，每層越薄，組成的物體便越趨近於球台。先來看一層典型的截頭圓錐體，頂是一個半徑是 r_i 的圓，底是一個半徑是 r_i' 的圓，斜長是 ℓ_i，高是 h_i，從圓球中心至圓錐側面的垂直線長度是 p_i。利用相似三角形的性質可知

$$(r_i + r_i')/2 : p_i = h_i : \ell_i \quad ,$$

因此 $\ell_i(r_i + r_i') = 2p_i h_i$（見圖 9）。我們也知道截頭圓錐體的側面積是 $\pi \ell_i(r_i + r_i')$（留給讀者作為習題，可以參考圖 9），也就是 $2\pi p_i h_i$。把球台看成是由眾多層截頭圓錐體組成，每層越薄，p_i 趨近於定值 R，所以眾多層截頭圓錐體的側面積合起來趨近於 $2\pi Rh_1 + 2\pi Rh_2 + \cdots = 2\pi R(h_1 + h_2 + \cdots) = 2\pi RH$，其中 H 是眾 h_i 的和，等於球台的厚度。

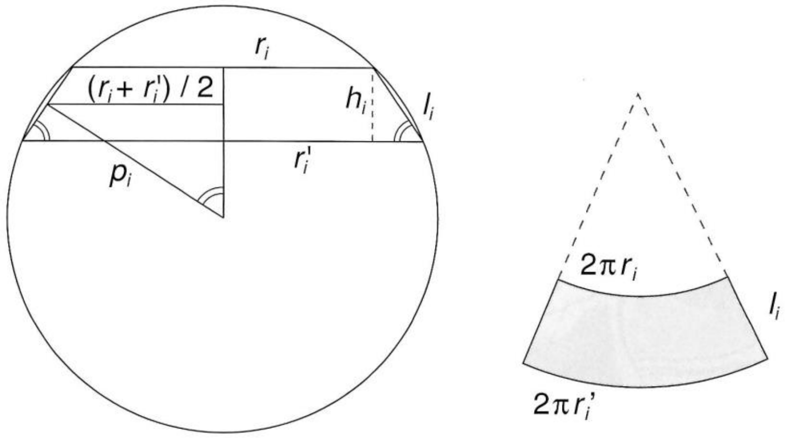


圖 9

3.　阿基米德的時代，是古代希臘數學的高峰，幾何方面尤其發達，由以上敘述的例子可見一斑。但奇怪地，雖然有些結果，一經提出，當時任何一位希臘數學家完全不會感到陌生，卻從來沒有人提出過，遑論證明了。以下我們將要介紹一個這樣的結果，它距阿基米德二千年後才有人提出來並且試作解釋。這個結果對後世數學發展非常重要，可以說得上是數學史上的一個里程碑。讓我從一封書信開始敘述這段故事吧。

1750 年十一月，瑞士數學家歐拉（Leonhard Euler, 1707–1783）寫了一封信給德國數學家哥德巴赫（Christian Goldbach, 1690–1764），談及一些多邊形（polygon）與多面體（polyhedron）類比的問題。特別地，對多邊形而言有以下兩個熟知的結果：

（＊1）　頂點（角）的數目等於邊的數目（記作 N ）；

（＊2）　內角和等於 $2(N-2)$ 個直角。

大家在初中數學課上都碰到（＊2）吧？對凸多邊形（convex polygon）容易證明這回事，但其實對凹多邊形（concave polygon），那依然是對的，詳細情形在這兒就不說了，回到歐拉的信吧。他在信上引進幾個參數：多面體的面的數目，現多記作 F ；頂點的數目，現多記作 V ；棱的數目，現多記作 E 。請注意一點，歐拉特意引入「棱」（edge，原拉丁文是 acies）這個新名詞，有別於「邊」（side，拉丁文是 latus），是有其用意的，暫且按下不表，遲些再談！用歐拉自己的說話：「由於沒有公認的名稱，我把它叫作棱。」接著，歐拉在信上寫下了一些命題，他還說：「命題六和命題十一是很重要的，但那是如此困難，至今我還沒有發現滿意的證明。」

讓我們先看命題十一：若多面體有V個頂點，則面角和等於$4(V-2)$個直角。嚴格而言，面角和並非（∗2）中內角和的真正類比，因為多邊形的邊的真正類比是面，所以多邊形的內角的真正類比應該是面與面構成的角。但是如果考慮面與面構成的角，卻找不到較好的類比結果。反而考慮面角和，倒有一條與（∗2）相似的公式。

試看一個特殊例子，即是一個棱柱體（prism），它的底和面是相同的N邊形，連接相應的點是N條垂真的棱（見圖 10）。那麼底和面的內角和各是$2(N-2)$個直角，合起來是$4(N-2)$個直角。側面由N個矩形組成，每個矩形的內角和是 4 個直角，合起來是$4N$個直角。因此，棱柱體的內角和是$8N-8$個直角，也就是$4(V-2)$個直角，因為V等於$2N$。反之，把命題十一應用到這個棱柱體上，可以得到（∗2）這條公式。

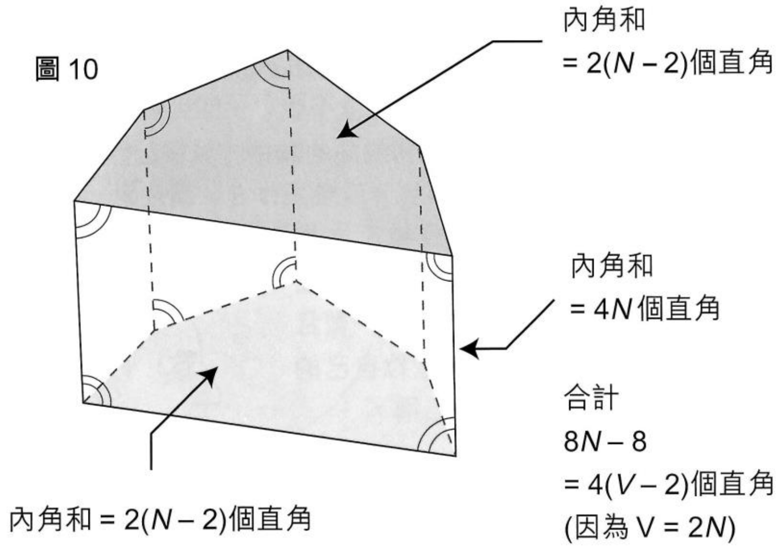
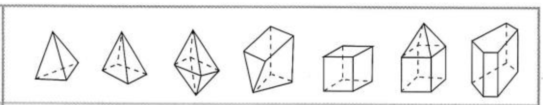


圖 10

上面只是提供了一條線索，我們無從確定歐拉如何發現命題十一的公式。但根據他的工作習慣，讓我們試圖重建一個可能的策略，就是考慮一些實驗數據。大家可不要小覷這個看似平凡的策略呀！以Σ記作面角和，V記作頂點數目，收集一些例子，寫下各例子的V和Σ，將會看到Σ全是 4 的倍數，而且隨V增大（見圖 11）。



V	4	5	6	7	8	9	10
Σ (直角的數目)	8	12	16	20	24	28	32
$4V$	16	20	24	28	32	36	40
$4V-\Sigma$	8	8	8	8	8	8	8

猜想：$\Sigma = 4V-8$

圖 11

再仔細觀察，Σ 等於 $4(V-2)$ 個直角這回事，已經呼之欲出了！再從另一個角度看看這回事，可以加強對這個猜測的信念，那就是看看面角和與 $4V$ 個直角相差多少。為什麼看這個差呢？面角和可以把每一面的內角相加而得，也可以把每一個頂點上的面角相加而得。如果多面體是個凸多面體，每個頂點上的面角相加不能大於 4 個直角。二千多年前的希臘數學家也懂得這回事，它是公元前三世紀初歐幾里得（Euclid，約公元前 330 至公元前 275）的巨著《原本》（Elements）裏卷十一的第二十一條定理。因此在凸多面體，面角和 Σ 不大於 $4V$ 個直角（見圖 12），看看兩者相差多少或者有點意思。要是你收集一批例子，便會看到總有 $4V-\Sigma=8$ 個直角（見圖 11），於是便猜測 Σ 是 $4(V-2)$ 個直角了。雖然歐拉在信上及論文中都沒有聲明，其實他只是考慮凸多面體的情況。不過如今我們曉得多面體是凸是凹都沒有關係。你試找一個凹多面體的例子看看，面角和還是 $4(V-2)$ 個直角（見圖 13）。

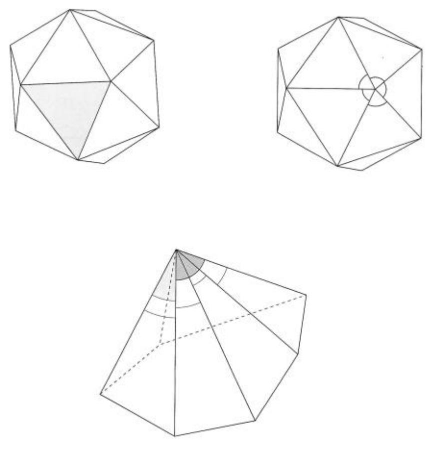


圖 12

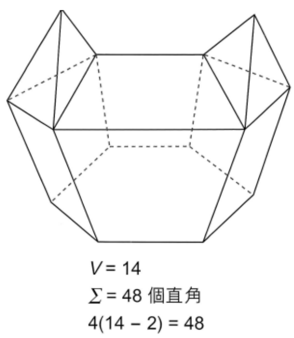


圖 13

數學上難有巧合，所謂巧合，內裏必有文章！雖然歐拉當時在信上並沒有證明面角和是 $4(V-2)$ 個直角，他已有理由相信那是一個可靠的猜測，因此提出了信上的命題十一。這條命題完全以古代希臘的幾何語言表達，但從來沒有在古代希臘的數學文獻上出現，奇怪嗎？如果我們看看信上的命題六，便能夠加深對這個問題的理解。命題六是：多面體的面的數目和頂點的數目合起來，比棱的數目多二，即是說 $F+V-E=2$ 。你有沒有發現，命題六和命題十一都是描述同一回事呢？假定 F 個面分別是 E_1 邊形、E_2 邊形、…、E_F 邊形，那麼面角和等於 $2(E_1-2)+2(E_2-2)+\cdots+2(E_F-2)$ 個直角，即是 $2(E_1+E_2+\cdots+E_F)-4F$ 個直角。多面體的每條邊都屬於兩個面，因此在 $E_1+E_2+\cdots+E_F$ 中，每條邊都算了兩次，所以 $E_1+E_2+\cdots+E_F=2E$ 。由此可見面角和等於 $4E-4F=4(E-F)$ 個直角。因此，面角和等於 $4(V-2)$ 個直角，相當於 $V-2=E-F$ ，即是 $F+V-E=2$ 。請留意，命題六的提法中完全不涉及角的大小或線段的長短，雖然命題十一卻涉及角的度量！這一點與古代希臘幾何的傳統極不合拍，因為古代希臘幾何論及全等形、相似形、三角、圓、等等，往往都涉及角和線段的度量。像命題六這種結果，與角或線段的度量無關，超越了古代希臘幾何的範圍。運用古代希臘幾何的知識，不足以駕馭這種問題，甚至根本不會提出這種問題。（從高等數學的角度看，這兩個味道完全不同的定理是敘述同一回事，內裏蘊含深刻的意義。限於作者的學識，不容易在這兒說明白，只好暫時擱下不表。）

4. 為什麼歐拉會提出這種問題呢？從他的另一份文獻 *Elementa doctrinae solidorum* （1750 年十一月在聖彼得堡科學院宣讀，但直至 1758 年才刊印出來），或者可見其端倪。歐拉在那篇論文說：「在平面幾何把多邊形分類很容易，只用看它有多少條邊，它就有多少個角（見圖 14）。在立體幾何把多面體分類卻困難得多，單看它有多少個面是不足夠的。」的確，以下所示的三個六面體（見圖 15），你不願意說它們是同類吧？它們每一個的頂點數目都不同。即使它們的面的數目和頂點的數目都各自相同，你也不一定願意說它們是同類的，例如以下所示的兩個六面體（見圖 16），各有八個頂點，其中一個每面都是四邊形，另一個有兩面是四邊形，兩面是五邊形，兩面是三角形。為了突顯多面體的各個面的邊，歐拉特意引入「棱」這個新術語，與平面圖形的「邊」有別。看來似乎他起初對「棱」寄予厚望，以為它有助於把多面體分類。讓我們再審視上一節的實驗數據，看來若 F 相同與 V 相同，則 E 也相同。對多面體分類而言，此非妙事，它意味

「棱」的引入沒有幫助。但從另一角度看，卻有意外收獲，它意味F、V、E之間存在著某種關係！這有如 1492 年哥倫布（Christopher Columbus, 1451–1506）本想尋找往中國和印度的海路，卻去到了美洲！

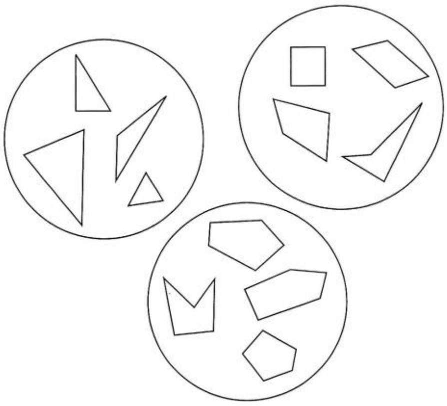


圖 14

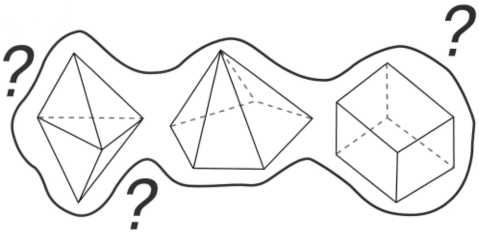


圖 15

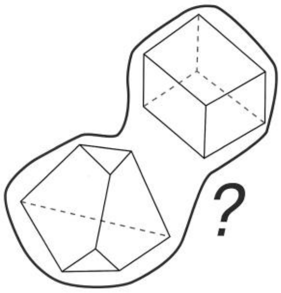
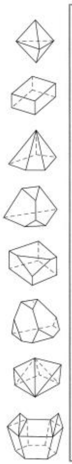


圖 16

似乎E隨F和V增大，不妨看看E和$F+V$的關係。從實驗數據不難得到猜測$F+V-E=2$（見圖 17），多看一些凹多面體，猜測依然成立（見圖18）。不過，猜測始終是猜測；無論有多少數據支持，未經嚴謹證明，沒有滿意解釋，它始終不能算作定理。時至今天，我們知道$F+V-E=2$這道公式對某一大類多面體是正確的。自歐拉以降不少數學家試圖證明這道公式，有些人以為證明了，其後又有人指出證明欠善，如此往復摸索，直至 1847 年（距離歐拉發現該公式已經差不多一個世紀！）施圖特（K.G.C. von Staudt, 1798–1867）才給出一個叫人滿意的證明。



F	V	E	F+V	F+V−E
6	5	9	11	2
6	8	12	14	2
6	6	10	12	2
6	8	12	14	2
7	10	15	17	2
7	10	15	17	2
9	7	14	16	2
14	14	26	28	2

圖 17

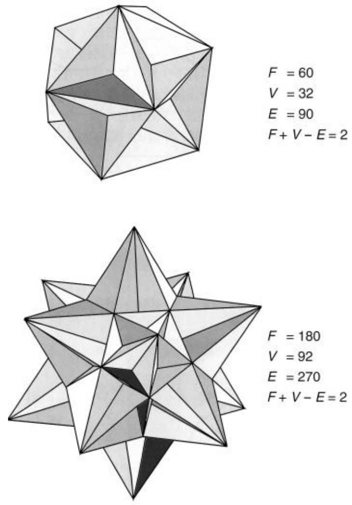


圖 18

歐拉在 1750 年十一月的信上結尾說：「我感到詫異，就我所知前人從沒有注意到這些立體幾何的結果。」如果他指的是古代希臘數學家，他說對了。但如果他包括所有十八世紀或以前的人，話就不對了。他並不曉得笛卡兒（René Descartes, 1596–1650）早在 1630 年左右已經發現並討論 $F+V-E=2$ 這道公式，不過笛卡兒的文稿 *De solidorum elementis* 直至 1860 年才重現世間，當時歐拉作古已近八十年。今天我們習慣把這道公式叫做歐拉−笛卡兒公式，以紀念兩位大師的貢獻。（有數學史家考據史料，認為笛卡兒的文稿在運送途中曾經失而復得，在 1675 年至 1676 年間德國哲學家數學家萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716）還把文稿手抄了，但其後原稿及手抄本再度失卻蹤跡，至 1860 年才有人找回萊布尼茲的手抄本。也有數學史家認為笛卡兒的文稿其實並沒有發現 $F+V-E=2$ 這道公式，只是後人誤讀了文稿的內容。）

歐拉在 1751 年宣讀了一篇論文，提出了 $F+V-E=2$ 的一個證明，驟看去是很自然的解釋。的確，在十九世紀也有不少數學家接受這樣的解釋。他按次從多面體削去一個四面體，在過程中保持 $F+V-E$ 的值不變更（見圖 19），至最後剩下一個四面體，$F+V-E$ 的值是 $4+4-6=2$。但想深一層，這個解釋只說明了公式對某些形狀的多面體成立。對一般多面體而言，可保證不了這樣的削法一帆風順！法國數學家柯西（Augustin Louis Cauchy, 1789–1857）在 1811 年給這道公式提出了另一個著名的證明，中心思想相當巧妙。他把多面體其中一個面拿掉，將其餘的面攤開來成為一個平面圖，於是新的 $F+V-E$ 是原來的 $F+V-E$ 減掉 1（拿走的一面）。接著他把平

面圖剖分成眾多的三角形，過程中需要添加某些邊（見圖 20 第三個小圖中加上的虛線），但卻不會更改 $F+V-E$ 的值！接著他逐一從外而內把一個一個三角形去掉（見圖 20 小圖中著色的部分），過程中也不會更改 $F+V-E$ 的值（見圖 20）！最後剩下一個三角形，即是 F 化為 1、V 化為 3、E 化為 3，即是 $F+V-E$ 等於 1，原來的 $F+V-E$ 就是 2。

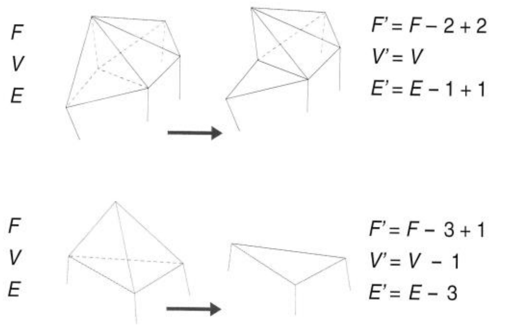


圖 19

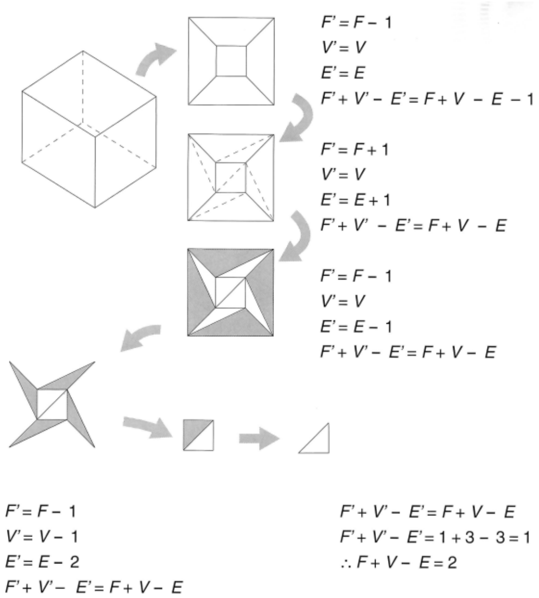


圖 20

歐拉和柯西提出的證明及別的人提出的一些證明後來都受到質疑，其中某些步驟不是如想像中理所當然的。漸漸越來越多奇奇怪怪的反例給提出來，有些是穿了孔的多面體，有些是在一條棱上相連的兩個多面體，有些是在一個頂點上相連的多面體（見圖 21）。最有趣的一個例子，靈感源自某種雙結晶體，是一個立方，中心是個鏤空了的小立方（見圖 22）。據說有人反駁說，那其實是兩個多面體，猶如孕婦懷著胎兒，你能否說那位母親有兩個頭呢？這些反例其實極富建設性，它們揭示了證明的困難所在，是定義何謂多面體，並找出對那些多面體 $F+V-E=2$ 這道公式成立。當數學家弄清楚問題的癥結後，叫人滿意的證明亦隨之出現，不過距離歐拉提出問題，已經過了一個世紀了。

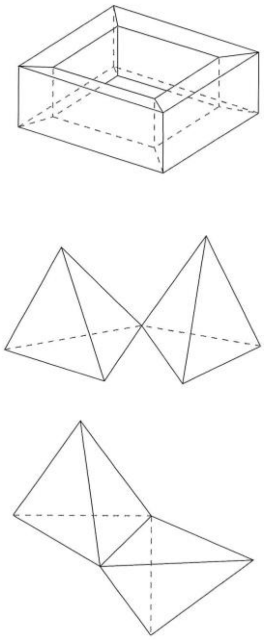


圖 21

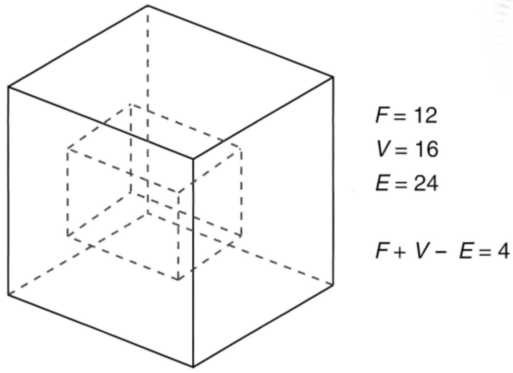


圖 22

也許我們應該用「多面形」代替「多面體」，因為我們其實感興趣的只是多面體的表面，由眾多多邊形組合而成。姑且從俗，讓我們仍然用「多面體」這個名稱吧。我們要考慮的多面體，是個怎麼樣的東西呢？它是由有限多個平面多邊形組成，按照下述意義拼湊在一起：（1）若兩個多邊形相交，它們交於一條公共的邊；多邊形的每一條邊恰好是另一個並且只是另一個多邊形的邊。（2）對每個頂點，那些包含它的多邊形可以排成一連串 Q_1、Q_2、…、Q_s，使 Q_1 與 Q_2 有一條公共邊，Q_2 與 Q_3 有一條公共邊，…，Q_{s-1} 與 Q_s 有一條公共邊，Q_s 與 Q_1 有一條公共邊。現在可以敘述何謂歐拉-笛卡兒定理：設 P 是滿足下列兩個條件的多面體，（a）P 的任何兩個頂點可以用一連串棱連接，（b）P 上任何由線段（不一定是 P 的棱）構成的圈把 P 分劃成兩片。則對 P 來說，$F+V-E=2$。

讓我們看一個形象化的證明，把棱看作是堤，把面看作是堤圍成的區域，其中一面是湖，其餘是旱地。每次打破一道堤，唯一條件是決堤後必須多了一塊並且僅多了一塊旱地被水淹了（見圖 23）。如此這般，直至全部區域被淹為止，數數有多少道堤給破掉。一方面，每打破一道堤即多一塊旱地被淹沒，因此給破掉的堤的數目是 $F-1$，沒給破掉的堤的數目是 $E-(F-1)=E-F+1$。另一方面，從一個頂點至另一個頂點沿着旱堤走有唯一的路（請讀者想一想，為什麼會如此？附錄中給出一種解釋。）所以沒給破掉的堤的數目是 $V-1$（也請讀者想一想，為什麼會如此。附錄中給

出一種解釋。）把兩種數法合起來看，有 $E-F+1=V-1$，即是 $F+V-E=2$。

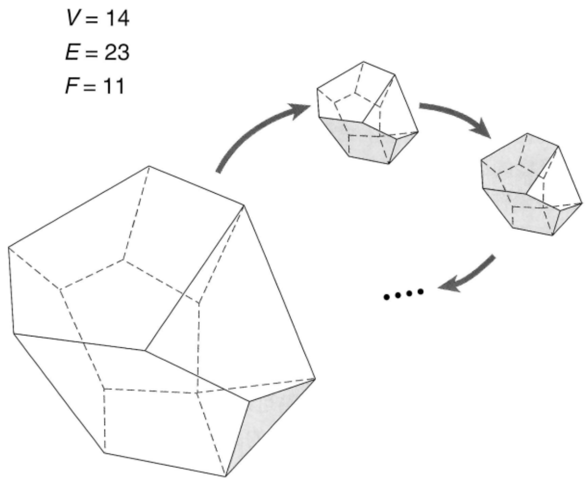


圖 23

5. 這道歐拉-笛卡兒公式的數學意義，較諸它的實際內容和應用來得重要，超越了古典幾何的範圍，開闢了一個新的數學領域。在結尾這一節我只能把它簡略地介紹一下。

先來看兩個多面體（見圖 24）。第一個有 $F=14$、$V=16$、$E=28$，故 $F+V-E=2$；第二個有 $F=16$、$V=16$、$E=32$，故 $F+V-E=0$。它們有沒有相異之處呢？把這兩個多面體想像成以橡皮做成（或者以麵粉或泥膠搓成），第一個可以變為一個圓球的面，第二個可以變為一個圓環（救生圈）的面。在變形過程中，允許任意把面拉長縮短，允許任意把面扭曲，但不允許把面撕裂，也不允許把面上不同的點黏合在一起。如果兩個立體圖形可以通過這種變換過程由一個變成另一個，我們便說它們是同胚（或稱拓樸等價）的。與圓球同胚的多面體有一個很漂亮的性質，便是 $F+V-E=2$。要把圓環變換成圓球，必須把圓環中間的各點黏合成一點。前面已經說過，這是不允許的，因此圓環與圓球不同胚，但與圓環同胚的多面體也有一個很漂亮的性質，便是 $F+V-E=0$。我們把 $F+V-E$ 這個數值叫做那類多面體的歐拉示性數（Euler characteristic）。歐拉示性數是一個在同胚關係底下的不變量，就是說，在上述拉拉扯扯的過程中，這個數值是不變更的。這種看法在古希臘幾何中從來沒有出現，因為古希臘幾何涉及角和線段的度量，在拉拉扯扯的過程中，這些度量都變更了。

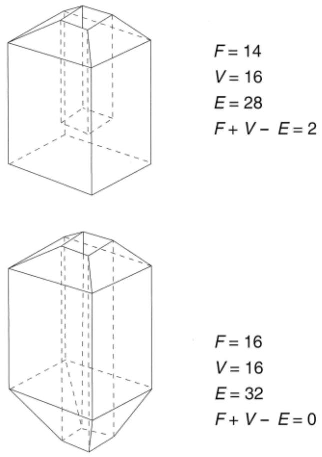


圖 24

這種看法導致數學家尋找同胚關係底下別的不變量。這方面的研究在十九世紀後半期漸漸成型，其中法國數學大師龐卡萊（Henri Poincaré, 1854–1912）的貢獻至為重要。歐拉示性數的推廣稱作歐拉−龐卡萊示性數（Euler−Poincaré characteristic）（如今回頭看看第三節開首的（∗1），雖看似平凡不過，卻添了一重新意！它是說 $V-E=0$ ，命題六是說 $V-E+F=2$ 。當中涉及的不變量，其一是 $V-E$ ，另一是 $V-E+F$ 。更一般的情況，是在三維、四維、五維、…以至 n 維空間的研究，歐拉−龐卡萊示性數就是由某一串數字依次加減而成）。這個新領域，叫做拓樸學（topology），是二十世紀數學發展的主要方向。

以下兩本讀物，程度適合中學同學，可供進一步了解歐拉−笛卡兒公式和拓樸學的關係：

（1） R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941; 修訂本 (I. Stewart), 1996 （有中譯本，《數學是什麼？》，科學出版社，1985）；

（2） 江澤涵，《多面形的歐拉定理和閉曲面的拓樸分類》，人民教育出版社，1964；香港版，智能教育出版社，2003。

還有一本很好的書，以師生對話形式討論歐拉−笛卡兒公式的證明過程，旨在闡述作者的數學哲學觀點，寓意深刻：

（3） I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 （有中譯本，《證明與反駁》，上海譯文出版社，1987）。

附錄

首先，請注意一回事，從每一點必定能循某些剩下的堤走去任何另一點，而且這條途徑是唯一的。這是因為每打破一道堤，它的兩個端點都仍被某些還未給打破的堤點接點地連結著，否則不會是多了且只多了一塊旱地給淹沒了！如果有至少兩條不同的途徑，便表示其間出現了由某些堤圍成的一個圈，但那不可能，因為那意味著還有一塊旱地沒給淹沒（見圖 25）！用圖論（graph theory）的語言，我們說剩下來的堤構成一株樹（tree）。既然如此，我們有辦法把那V點和那些連結著它們的堤依次排成以下的樣子：定了其中一點，設為a，先考慮走過一道堤便到達的點，放在第一層，再考慮走過兩道堤便到達的點，放在第二層，如此類推（見圖 26）。從圖中數一數有多少道堤，答案是$V-1$。

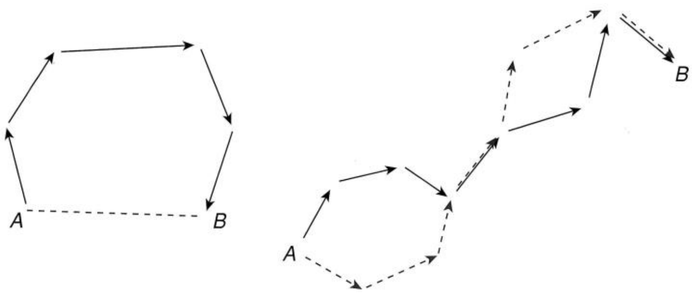


圖 25

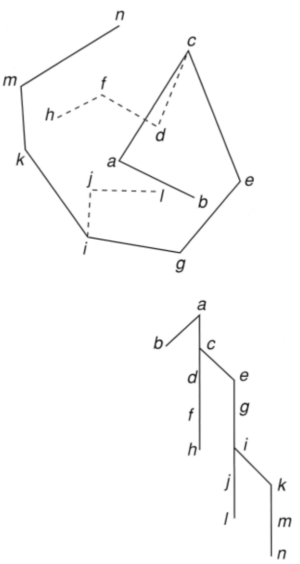


圖 26

作者電郵：mathsiu@hkucc.hku.hk