

沒有運算的數學堂如何教？

張僑平

香港中文大學課程與教學學系

黎潔婷

中學教師

背景

一堂數學課該如何上，不同人自有不同的見解和教法。就數學科本身而言，因涵蓋諸多不同的課題，譬如中學數學課程指引所列出的三大必修範疇（數與代數，度量、圖形與空間，數據處理）（課程發展議會，2002），在不同主題上教學方法的運用亦有不同。普通人對一般的事物或有自己的喜好，那麼一位數學教師會否在教學上也有自己的喜好呢？本文的兩位作者最近聊起了一些有關數學教學的話題，其中便涉及到教師教學的喜好。談話的內容，從一位數學教師的公開課說起，一步步延展開到諸多與數學教育相關的問題，希望能引起同行的共鳴與反思。以下我們整理了對話的內容，與業內分享。

一堂緊張的公開課

K 是一位入職已經三年的中學數學教師，自認為書教得不錯，學生喜歡上自己的數學課，在數學教學上也有很多自己的想法。不過，近日因為要準備公開課，讓他有些緊張和憂慮。他也與以前大學的數學老師 *T* 聊起了這次公開課。

K: 老師，好快就要上公開課了，今次的班級是中三學生，講授的內容是《畫立體正側俯視圖》。同事之間交流時，都覺得這個課題好有難度。

T: 為什麼呢？

K: 一來呢個課題沒有數學運算，二來估計唔到學生畫唔畫到……現在都在思考如何做才好。

T: 不如反過來想，為什麼覺得有數學運算就容易教呢？

K: 可能大部份 topic 都有運算，老師適應咗數學堂就係教運算技巧。如果我教 3D 畫立體、對稱、圖像的 topic 都較 algebra 的 topics 有壓力。可能我自己本身熱愛 algebra 多點。

T: 「熱愛」是指什麼？簡單？還是有運算，而自己又是否擅長運算？

K：高中時鐘意運算後的成功感。所以到教書都係鐘意教這類技巧。

T：但幾何都有運算。

K：但圖像以前唔知老師係 skip 咗教，定係我無留心，無印象自己點學。
運算幾何都鐘意。但我教畫圖、統計、對稱這類就唔太自在。

從上述的對話中不難看到，**K** 老師對公開課的緊張和不自在，主要因為自己對講授內容的不可掌控。一方面，不熟悉沒有運算的課題如何教，另一方面，也因為教授畫圖會不容易看到教學的效果，即不知道學生掌握程度如何。而對於涉及運算的課題，**K** 老師就不會感覺有壓力。這不僅是他的興趣所在，他還能享受解題的成功感，也容易掌握學生學習的情況。而這樣的體驗與他學生時代的經歷有很大關係。事實上，有研究者曾就香港教師和學生的數學觀做過一些調查，研究發現，教師和學生大多數會認為數學與運算有密切關係（黃毅英、韓繼偉、王倩婷，2005），而學生的數學觀與他們所經歷的學習空間（lived space）不無關係。換句話說，為何學生認為數學是運算或是一大堆的公式與定理，正正因為他們在課堂上所感受的數學就是如此。這一點從 **K** 老師的表述中亦可見到。另外，我們需進一步思考，對於不熟悉的課題，如何才能「自在」起來呢？

沒有運算的證明又該怎麼教？

公開課可能會給 **K** 老師帶來一定的壓力和緊張，**T** 老師想知道更多 **K** 老師對於沒有運算（或較少涉及運算）的數學課題的看法，於是順著前面幾何的話題，他們聊到了證明。

T：證明呢？幾何中有的是計算，有的是證明，有的是你講的畫圖之類。

K：我剛剛教完中二證明恆等式。我應該係變咗教學生記格式。(1) 左方；(2) 右方；(3) 因為；(4) 所以。**證明題目我不停強調格式的重要**，我不知道是否重點放錯了。之前教相似、全等三角形都類似，不停講格式。

T：你指教任何證明題都同代數證明差不多的方式？也就是說，用一種代數運算的思考方式，去學幾何計算，幾何證明？

K：證明應該高層次點，但我不覺得自己講得高層次咗，**變咗操練式**。

T：你所謂的「高層次」是什麼呢？

K：大致我講什麼是證明，我先講爸爸是男人，但不是所有男人都是爸爸。說明證明的手法是不能倒轉用數字代入數式。但我覺得都唔能夠讓學生

意識到什麼是證明……但教運算我感覺學生就較易明白和上手。所以一教證明，畫圖（即是非運算）或類似 topics 就有點緊張。

T：嗯，其實，我可不可以說，你覺得證明不應該是這些運算和格式？

K：Yes!!!!

T：那麼，你覺得證明是什麼呢？如果不好回答，或者說說你自己是否經歷過你期望中的那種證明呢？

K：我而家變咗操練學生考試拿高分，但我估計未必所有學生明白為何要這樣。我由小到大的數學都係操練出來的。教證明時我都嘗試用多些生活例子去講何謂證明，即不能夠用一個數字去證明所有 case 都是對的。要有個 concept，未知數 x 、 y 是任何數字，以致你推測到所有 case 都是對的。這是我個人認為的證明。

T：幾何證明，如果沒有生活例子，又該如何講授呢？

K：那我會用剪紙或是一些實際活動來試一次該定理，再推到其他更多的 case 吧。例如 pyramid 等於三分之一的 prism。或者用倒水法 video 證明畢氏定理。剪紙證明 SSS, SAS……令學生覺得不太抽象而明白原因。

T：你提到生活例子，或者動手操作，來講解或者解釋證明，為什麼你覺得需要這樣做？是為了學生容易記住？方便理解？還是說，證明就需要這樣呢？

K：理解完再操練要有意思一點，不用死背數學。

T：代數方面，是否就不須要這樣做（動手操作，生活例子）？你提到運算多比較好講解。如果有很多證明，可能找不到或者很難找到生活例子或動手操作演示，怎麼辦？

K：嗯…每個課題性質也不同，所以我教法也不同。有得活動示範而時間許可便做，有生活例子連繫到使用，但如果高 form 一些較難的證明，都可能只可以係學生以前學的已有知識來推說……教了一次 DSE 的課程，很多時候只能盡我能力重溫已有知識來證明有些較深的定理……但例如「圓形的特性」有好多 reason，我也沒有每個 reason 解明白，只是操練式去做題目。

T：會不會其實你所理解的「操練式」，就是數學需要到達的一個程度呢？叫操練可能不好聽，叫抽象思維，會不會舒服點？回到數學證明，正如你說，只是「操練」般記得格式再模仿，不是真正的證明。但是，有生活例子同動手操作的「證明」，同樣也被人覺得不是證明。

K：可能去到我好難 detail 地再延伸講解落去背後的原因，我就用操練來解

決。但有時想睇吓係咪每位老師都係咁解決這些課題。「證明」是否有特定的方法呢???如果我教的「證明」別人認為不是證明,那「證明」就變得見人見智。即是每人的抽象思維都唔一樣?

T: 換句話說,證明會存在不同的形式,不同人抓住的其中一部分。其實,你教證明,無論代數或幾何,想學生學到些甚麼呢?

K: 即係證明係好大的拼圖,好難係課堂講解全副拼圖,課堂的證明極其量都係其中教師覺得最精粹的一部份。我教多幾次這類課題就覺得學生背咗個格式,但其實想他們明白點解數學上那些格式的必要性,而唔洗長篇大論好似寫論文咁。不過,現在學校老師之間的教與學分享都缺少這些,有時教書就變得技術性……好少諗到太深入。

儘管這段對話較長,不過我們能看到,K老師對於沒有運算的數學課題並非不知如何處理,他有一套自己的理解,也有不同的處理方式,包括活動示範、生活例子,當然也包括讓學生記住格式,去操練一些技巧(可見對話中重點突出的文字)。而操練,實乃「不得已而為之」。儘管他知道證明並非如記住格式這般操練,但苦於難以解釋背後的理據,只好「退而求其次」,以操練代之,起碼也能幫學生取得分數。K教師這種數學觀念和教學行為的不一致,在我們一些關於數學觀的研究中也有發現,即使教師持有問題解決的數學觀,但實際的教學卻是另外一種方式,特別一旦遇到教學上的困難,便會很快轉向工具型的教學,這種轉變在新教師身上尤為明顯。而這種觀念和教學行為的不一致,從某種程度上也反映出教師學科知識(subject matter knowledge: SK)或學科教學知識(pedagogical content knowledge: PCK)的不足(Zhang & Wong, 待出版)。

結語

數學課是否就是教運算技巧以幫助學生拿分數?我們相信,絕大多數老師會給出否定的答案。但數學與運算密切相關(甚或數學就是運算)卻是被很多教師所認同。對於K老師來講,與其說因為精於運算而習慣講授運算題,事實上他是在教授基本技能(basic skills)和培養高階思維能力(high order thinking skills)之間更偏重於前者,或者說對於學習的結果(product)的重視多過學習的過程(process)。他能察覺到二者的不同,也知道後者的重要(「證明應該高層次點」,「理解完再操練要有意思一點」),唯從基礎運算過渡到高階能力,感到教學乏力。他也想多看看,多參考其他教師的教

學，但現實的境遇又太少提供這樣的機會。由此，對自身教學的進一步反思和提升自己的機會，也就慢慢消失於繁忙的工作中……

回到最初的問題，沒有運算的數學課該如何教呢？既然沒有或者少有筆頭計算，那就多關注思維方式和方法。我們常說培養學生的數感、空間感，甚或動手能力、探究能力、推理能力、批判性思考能力等，不正可在這類課題中大有作為嗎？以畫立體正俯視圖或展開圖為例，這些問題的出現主要受到早期心理學研究中空間能力測試的影響（黃毅英，1990）。教學中除了借助實物或教具動手畫，也可利用 IT 展示更多立體，還可以製作立體，玩一些立體數學遊戲，透過立體模型認識空間關係。除了從立體到平面，也需要從平面圖形來處理立體問題，甚或根據題意還原立體。這些活動亦非到中學階段才開始，在小學接觸立體圖形時就需要這類活動體驗。而學生在中學階段幾何問題解決能力的不足，與低年級時的活動經驗的缺失不無關係（張僑平、陳葉祥、黃毅英，2014）。

造成 K 老師困境的原因，既與其自身的 SK、PCK 有關，也與促進他進一步專業成長的環境有關（張僑平，2013）。不少學者早已提出，教師理應成為「具反思的實踐者」（reflective practitioner）以及教師之間學習社群的重要（learning community）（黃毅英，2014；Schön, 1983；Siu, Siu, & Wong, 1993）。然而，前線教師（尤其年輕教師）或許正是因為經歷一次次受挫（缺乏指導、缺少交流討論的空間和時間），對反思的熱情漸漸退卻，疲於在課堂之間、課題之間交接，一種我們不願見到的循環每天在課堂發生。拉近這應然和實然之間的距離，需要我們每位專業教師長期共同的努力。

參考文獻

- 張僑平（2013）。學科教學知識、數學教學與數學教師教育。載羅浩源、張僑平、林智中（編）。《漫漫教·研路——黃毅英教授榮休紀念文集》（頁 140—150）。香港：香港數學教育學會。
- 張僑平、黃毅英、陳葉祥（2014）。從教科書分析帶出教學啟示：以小學數學的一個課題為例。載石鷗、張增田（編）。《教科書評論》（頁 122—131）。北京：首都師範大學出版社。
- 黃毅英（1990）。立體數學遊戲與空間想像力之訓練。《數學傳播》56，78—96。後載黃毅英（編）（1997）。《邁向大眾數學之數學教育》（頁 294—328）。臺北：九章出版社。

黃毅英 (2014)。由「學養教師」到「學習社群」——從「 $4\frac{3}{2}$ 是不是帶分數」說起。《香港數理教育學會會刊》，30，頁 1—7。

黃毅英、韓繼偉、王倩婷 (2005)。數學觀與數學教育。載黃毅英 (編)。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》(頁 77—99)。香港：香港數教育學會。

香港課程發展議會 (2002)。《數學教育學習領域課程指引 (小一至中三)》。香港：教育統籌局。

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. London, U.K.: Temple Smith.

Siu, F. K., Siu, M. K., & Wong, N. Y. (1993). Changing times in mathematics education: The need of a scholar-teacher. In C. C. Lam, H.W. Wong, & Y. W. Fung (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia: Challenges of the 21st Century* (pp. 223–226). Hong Kong: Department of Curriculum and Instruction, the Chinese University of Hong Kong.

Zhang, Q.P., & Wong, N. Y. (in press). Beliefs about mathematics, mathematics knowledge and approaches to teaching among Chinese teachers. In L. Fan, N.Y. Wong, J. Cai., & S. Li (Eds.), *How Chinese teach mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific.

作者電郵：張僑平 qpzhang@cuhk.edu.hk

黎潔婷 kitting_lai@yahoo.com.hk