

## 從新高中文憑試看數學教育的方向

余展翔

香港浸會大學

### 香港數學教育的概況及宗旨

根據香港考試及評核局的課程及評估指引（香港考試及評核局，2007）<sup>4</sup>，數學科有五個課程宗旨。當中的課程宗旨（一），數學這個學科是為了培養學生「批判性思考、創意、構思、探究及數學推理能力，並運用數學建立及解決問題之能力」。但現今香港的數學課程設計是否真的能培養學生的創意思維？本文將會以布魯姆分類學（Bloom's Taxonomy）（Krathwohl, 2002）的角度，分析現今數學科的評核機制，以香港中學文憑試的機制作論證，指出評核試卷未能達致指引內的宗旨（一），並解釋導致上述情況發生的因素。最後，會以開放式題型（Hancock, 1995）作建議，希望能解決現今數學科課程中欠缺創意思維訓練的困境。

### 現今香港數學科的評核機制概況

在 1956 年，班傑明·布魯姆（Benjamin Bloom）首次以六個層次為學生的認知能力作分類。當時的布魯姆分類學分為六個層次：知識（Knowledge）、理解（Comprehension）、應用（Application）、分析（Analysis）、綜合（Synthesis）及評鑑（Evaluation）。直至 2002 年，Lorin Anderson 和 David Krathwohl 將原來的布魯姆分類學重整及作出調動。為了令原來的六個層次更具體，布魯姆分類學修訂版（Bloom's Taxonomy Revised）的六個層次由原來的名詞轉換為動詞，而且將知識及綜合重新命名為記憶及創作。另外，由於時代的轉變，社會大眾對於認知能力的層次的重要性有不同的理解。在布魯姆分類學修訂版中，創作成為了最高層次的認知水平。這項轉變亦反映了在二十一世紀中，創作除了是不可或缺的要害外，更是社會大眾非常重視的素質。除了上述的調整外，每一個層次亦加入了四個

---

4 根據香港考試及評核局的課程及評估指引（香港考試及評核局，2007），數學科有五個課程宗旨，主要是為了培養學生：（一）批判性思考、創意、構思、探究及數學推理能力，並運用數學建立及解決問題之能力；（二）清晰及邏輯地表達意見的能力；（三）運用數字、符號及其他數學物件的能力；（四）建立數字感、符號感、空間感、度量感及鑑辨結構和規律的能力；及（五）欣賞數學中的美學及文化。

知識層面 (The Knowledge Dimension)<sup>5</sup>，令布魯姆分類學由原來的六個層次演變為一個 6 乘 4 的模型。根據 Krathwohl (2002)，布魯姆分類學修訂版中的四個知識層面由具體至抽象。當中的最高層次為後設認知，即對認知過程的認知。後設認知是個人對自己的認知歷程加以掌握、運用以及評鑑的知識。例如，學生能夠解題是他們對數學知識的一種認知，學生懂得將此認知過程掌握並制定一套策略，便呈現了對該認知的認知。這便是後設認知。由於課程及評估指引內的宗旨並未有要求學生達致知識層面的認知，故此在本文中，筆者只會以布魯姆分類學修訂版的六個認知層次作分析。同時，為了方便歸納，筆者將不會以新加入的四個知識層面作分析。

根據布魯姆分類學修訂版的分類，學生的認知能力可分為六個層次，分別為記憶 (Remembering)、了解 (Understanding)、應用 (Applying)、分析 (Analysing)、評鑑 (Evaluating) 及創作 (Creating)，可參考圖一。首兩個層次中，記憶即是學生只需要能做到知道及牢記課程的內容，可以是記一些名詞或符號，已能達記憶的認知層次。了解則是除了牢記一些詞彙外，還要懂得當中的意思、含意等。

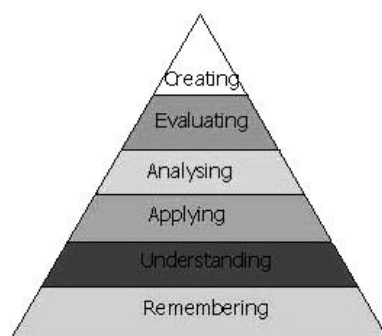


圖 一

---

5 四個知識層面 (The Knowledge Dimension) 分別為：(一) 事實知識 (Factual Knowledge)、(二) 概念知識 (Conceptual Knowledge)、(三) 程序知識 (Procedural Knowledge) 及 (四) 後設認知 (Metacognitive Knowledge)。事實知識代表學生能掌握一些事實、術語。概念知識代表學生能利用事實知識作分類或歸納。程序知識代表學生能利用已知的資訊、知識去解決問題。最後，後設認知代表學生除了能夠運用知識作解決問題外，還能夠掌握該知識並了解為何用某種策略或知識能夠解決某些的問題，是一個程度很高的知識層面。

10. The ages of the members of Committee  $A$  are shown as follows:

17	18	21	21	22	22	23	23	23	31
31	34	35	36	47	47	58	68	69	69

(a) Write down the median and the mode of the ages of the members of Committee  $A$ . (2 marks)

圖 二 (HKEAA, 2013)

3. Factorize

(a)  $x^3 - 6xy + 9y^2$ ,

(b)  $x^2 - 6xy + 9y^2 + 7x - 21y$ .

(3 marks)

圖 三 (HKEAA, 2012)

(ii) At the end of which year will the total floor area of all public housing flats first exceed  $4 \times 10^7 \text{ m}^2$  ?

(5 marks)

圖 四 (HKEAA, 2013)

以圖二為例，學生只需記得中位數和眾數的定義便能回答問題。這類型的題目會被視為了解層次的題目。而應用就是能夠準確運用已記住及理解的內容解決學科的應用性問題並找出答案。例如，可參考圖三，題目要求學生為數式作因式分解。因此，學生需利用課程中已教授的內容解題，這類型的題目就是應用層次的題目。分析是較高層次的認知，除了懂得運用，還能夠為不同的內容作出比較、分類，從而作出分析及提出經過分析後的結論，可參考圖四。在這題目中，學生除了需要懂得應用不等式解題外，還需要作出分析，判斷多少年後才符合題目要求，這類型的題目正是考核學生在分析層面上的認知能力。而評鑑則要求做到證明及判斷是非的程度。例如，題目會給予一些情況並提出某人結論，並要求學生判斷該結論是否正確及恰當，可參考圖五的分題 (b)。最後，創作就是能綜合學科內容，並發展一套屬於學生個人的見解或答案，可以是要求學生創作一些有別於題目給予而同樣符合題目要求的答案。這類題目亦可以開放題目的部分，並給予學生自由的空間去解答問題。筆者將於調整建議部分舉例說明。

8. In Figure 1,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  and  $AD$  are chords of the circle.  $AC$  and  $BD$  intersect at  $E$ . It is given that  $BE = 8$  cm,  $CE = 20$  cm and  $DE = 15$  cm.

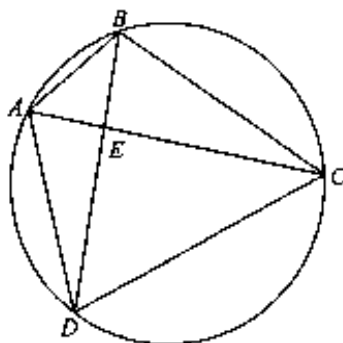


Figure 1

- (a) Write down a pair of similar triangles in Figure 1. Also find  $AE$ .
- (b) Suppose that  $AB = 10$  cm. Are  $AC$  and  $BD$  perpendicular to each other? Explain your answer.

(5 marks)

圖 五 (HKEAA, 2012)

	香港中學文憑考試 2012 卷一		香港中學文憑考試 2013 卷一	
	題目	總分	題目	總分
記憶 (Remembering)		0		0
了解 (Understanding)	Q8(a),10(a),14(a)(i)	6	Q6(a),10(a),14(b)(ii)(1)	4
應用 (Applying)	Q1,2,3,4(a),6(a),7(a),9, 12(a),13(a),14(a)(ii)	29	Q1,2,3,5(a),8(a),11, 14(a),15(a),17(a),	28
分析 (Analysing)	Q4(b),5,6(b),13(b)(ii), 10(b)(i),11,12(b)(i), 13(b)(i),14(b)(ii), 15,16,17,18,19(a), 19(b)(ii)	56	Q4,5(b),6(b),7,9, 10(b), 12(a),13(a),14(b)(i), 14(b)(ii)(2),16,17(b)(i), 18(a),18(b)(i),19(a), 19(b)	54
評鑑 (Evaluating)	Q7(b),8(b),10(b)(ii), 12(b)(ii),14(b)(i),19(b)(i)	14	Q8(b),12(b),13(b),15(b), 17(b)(ii),18(b)(ii),19(c)	19
創作 (Creating)		0		0

表 一

回歸香港現況，以新高中數學科（必修部分）來看，題目主要集中在中級層次，即應用及分析的認知能力測試，主要評核考生能否達致準確運用公式或課題中的知識並加以應用作解決問題，可參考表一。從表一可見，文憑試數學卷一的試題中，分析層次的問題佔了大約半數的題目。相反，評鑑類型的題目只佔少數，而且大多在題目的分題中出現。而創作這個最高認知層次的問題就一次也沒有出現過。另外，以卷一分數的分佈作分析，可參考表二及表三，2012 年及 2013 年的分佈大致相同。在過往兩屆的新高中文憑試中，應用及分析層次的題目佔全卷超過七成半的分數。反映現今香港數學科的評核考卷嚴重側重中級程度認知層次的題目，缺乏考核學生創建的能力，使整個數學教學方針指向機械式的操練性題目和教學。在這種的評核機制下，老師為了幫助學生應付公開試，均集中時間教授操練

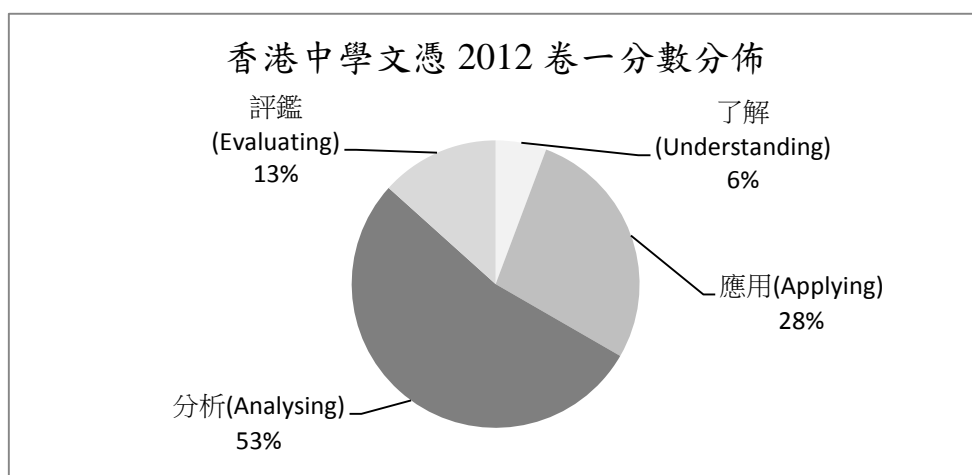


表 二

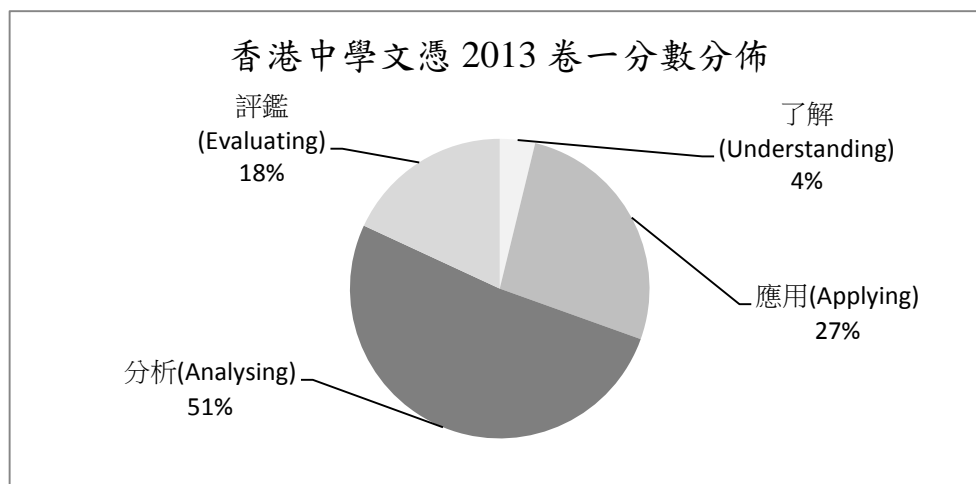


表 三

性的問題，導致學生過份追求對與錯的答案，沉溺在已有答案的問題上，失去解決日常生活問題的能力。更重要的是，在現今這個評核機制的設定下，阻礙了學生發展創意思維的空間，嚴重違反指引內的宗旨（一）。

### 評核方法的調整建議

鑑於上述的問題，筆者有以下的建議。在評核機制方面，中級層次的問題主導了考試，導致數學教育趨向追求操練，令學生在學習數學的過程中缺乏創意思維的訓練。因此，筆者建議可從兩方面入手。（一）在數學科引入校本評核及（二）調整現有公開考試的出題形式。

根據香港考試及評核局的資料，文憑試中有不少科目設有校本評核<sup>6</sup>，以更全面的方法評估學生的表現，避免「一試定生死」的情況。在四個核心科目中，只有數學科並未設有校本評核的機制，令數學教育的成果完全建立在公開試的考卷上。因此，筆者建議為數學科增設校本評核，而分數比重大約佔整科分數的 10%。評核方法可要求學生在文憑試的考核範圍中選一課題，利用該課題中學習的數學知識與日常生活連繫，並作專題研習。內容可以是分析現況，或解決日常問題。例如，學生可透過概率與統計的課題中學習的知識作數據分析，甚至可利用二次方程及配方法中的技巧，找出日常生活中最優化的情況等。在研習的過程中，由學生自行制定課題及題目，老師擔當輔助角色，負責審批及提供意見。這樣既能避免只靠公開試評核學生的水平，又能讓學生體驗不一樣的數學。

在公開考試的題目形式方面，筆者建議引入開放式問題。開放題可細分為三種：（一）條件開放題；（二）策略開放題；及（三）結論開放題。即是將封閉式題形的條件、策略或結論開放，予以學生自由提供答案。在開放題目時，要注意開放的力度，如題目過份開放的話，學生便難以掌握要求。以下是結論開放題的例子，筆者建議在既有的問題上加入一些能考核學生創建能力的問題。以圖六的題目為例（題目取自 2013 香港中學文憑

6 校本評核是指在整個科目的分數中，有一部分的分數由學校任教老師負責評核，評核的標準是基於學生在學校學習該科的表現。

設有校本評核的科目：

核心科目：中國語文、英國語文、通識教育

選修科目：生物、化學、物理、中國歷史、歷史、經濟等

詳情可參考香港考試及評核局的網頁：[http://www.hkeaa.edu.hk/tc/sba/sub\\_info\\_sba/](http://www.hkeaa.edu.hk/tc/sba/sub_info_sba/)

考試數學科卷一), 學生在分題 (a) 得到答案  $x > 25/4$ , 在分題 (b) 利用 (a) 並得出 7、8、9 三個整數的答案。考評局可考慮加入分題 (c) 要求學生創建另一或兩道不等式, 有別於題目給予的, 使其整數解仍然為 7、8、9。這樣的轉變, 除了要他們懂得解不等式, 亦要求他們懂得創建不等式, 從而訓練他們的創意思維 (鄭毓信, 2001), 這樣能避免考生沉溺於操練式的題目。

5. (a) Solve the inequality  $\frac{19-7x}{3} > 23-5x$ .
- (b) Find all integers satisfying both the inequalities  $\frac{19-7x}{3} > 23-5x$  and  $18-2x \geq 0$ .
- (4 marks)

圖 六 (HKEAA, 2013)

3. Factorize
- (a)  $4m^2 - 25n^2$ ,
- (b)  $4m^2 - 25n^2 + 6m - 15n$ .
- (3 marks)

圖 七 (HKEAA, 2013)

除了使用開放題的策略外, 考評局亦可嘗試要求學生創建一道題目。以圖七的題目為例 (題目取自 2013 香港中學文憑數學科卷一), 考評局可引入分題 (c) 要求學生模仿分題 (a) 及 (b) 的答案, 重新創建一道經因式分解後, 得出某特定因子的題目, 例如要求學生創建一道因子為  $(2x+3y)$  的題目。引入分題 (c) 後的題目, 較原來的更能評核考生對因式分解的認知。同時, 亦能提升學生的創建能力。

但這種評核機制的改變, 亦會為考試制度帶來不便。由於答案相對地自由, 評卷員並沒有統一的評核答案, 只能依靠一些評分標準或指引作出評核。同一位考生作答的答案, 在不同評卷員的評核中, 有機會出現不同的評分, 導致評核機制不一致的情況出現。另一方面, 這種評核制度的改變亦會為評卷員帶來額外的工作量。因為他們必須為每一位考生獨一無二的答案作出準確的評分, 無疑增加了他們的壓力和挑戰。不過, 為了能訓練學生的創意思維, 避免他們成為計算機器, 筆者認為這樣的代價是值得的。

## 結論

總括而言，現今的數學科教學法與評核機制對於學生的運算能力培訓充足，但對於訓練學生的創意思維仍有進步空間。以評估當中的有效度與可靠性作分析，根據表一的文憑試分數分佈，數學卷卷一的問題可靠性相當高，由於問題形式的分佈大致相同，題目類型主要集中在應用與分析的中層次問題。因此透過文憑試來分辨學生能力的可靠性高。但從問題形式的覆蓋率與相關性觀察，試卷中試題形式完全缺乏記憶及創建這兩個層次的問題，顯示覆蓋率的不足。同時，亦有違課程宗旨（一），培養學生的創意思維，令有效度偏低。其次，根據本文描述概況的部分指出，試題與指引內的課程宗旨的相關性亦有所不足。因此，考評局應重新鑑定現有的試題形式，並嘗試利用有效度及可靠性為試卷作評估，避免流於運算及操作性的問題上。筆者在本文中建議兩個方法解決現況：（一）增設校本評核及（二）以開放式題型為現有的問題形式上增設分題。這樣的調整除了可給予學生創意思維的發展，同時避免千篇一律的操練性題目。再者，老師的教學法亦不能一成不變。縱使考試制度不夠完善，老師亦應多考慮數學教育的本質，有策略性地培養學生的數學思維，而非盲目跟從課程大綱，訓練出一群運算工具。畢竟，數學並非一門只是操練的學科，如何將數學知識與生活連繫，以及當中的思考過程，才是學習數學的主要目的。

## 參考文獻

- Krathwohl D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory into Practice*, 212–218.
- Anderson, L. W., Krathwohl, D. R. (Eds). (2000). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A Revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Hancock, C. L. (1995). Enhancing mathematics learning with open-ended questions. *The Mathematics Teacher*, 496–499.
- HKEAA. (2012). *Mathematics (Compulsory Part) 2012 Examination Report and Question Papers (with marking schemes)*. Hong Kong: Hong Kong Examinations and Assessment Authority.
- HKEAA. (2013). *Mathematics (Compulsory Part) 2013 Examination Report and Question Papers (with marking schemes)*. Hong Kong: Hong Kong Examinations and Assessment Authority.



數學教育第三十七期 (12/2014)

Morris, P. (1996). *The Hong Kong school curriculum: Development, issues and policies* (2nd edn.). Hong Kong: Hong Kong University Press.

鄭毓信 (2001)。開放題與開放式教學。《中學數學教學參考》3, 1-3。

香港考試及評核局 (2007)。《數學課程及評估指引 (中四至中六)》。香港：課程發展議會與香港考試及評核局。

教育局 (2002)。《數學教育學習領域課程指引 (小一至中三)》。香港：教育局。

作者電郵：yusirmaths@yahoo.com.hk