

一堂坐標幾何課的教學設計：以旋轉變換為例

張僑平

香港中文大學課程與教學學系

吳文愨

衛理中學

引言

幾何圖形的變換是中學數學教學中的一個難點，尤其涉及到坐標平面內的圖形旋轉變換。它不僅需要學生具備一定的空間想像力（*spatial abilities*）（運動的觀點），還有代數化的思維（*algebraic thinking*）（數與形相結合）。表面上來看，圖形的變換比較直觀，教師可以通過動手操作，演示給學生看，但要令到學生明白這些變換背後的數學原理，就不那麼容易了。特別，要能讓學生明白從旋轉特殊圖形（如直角三角形）到一般圖形、從特殊角度（如 90 度）到一般角度的一般規律實屬不易。心理學家 Bruner（1960）提出知識學習可以有三個階段：

- (1) 動作表徵期（*Enactive representation*）以「由做中學」的經驗，包括直接或有目的的經驗、設計、演劇及示範的經驗。
- (2) 形象表徵期（*Iconic representation*）以「由觀察中學」的經驗，有參觀、展覽、電視、電影等經驗為主。
- (3) 符號表徵期（*Symbolic representation*）最高層次，以「由思考中學」的經驗為主。

為使學生體驗和理解從具體過渡到抽象，從實物操作過渡到符號演繹的過程，課堂教學活動的鋪排顯得尤為重要。以下我們將透過如何講解坐標平面的旋轉變換，來詮釋 Bruner 教學理論的應用。

所謂旋轉，就是在平面上，已知一個固定點 O ，將平面上任一點 P ，繞點 O 旋轉一個角度 θ 的得到點 P' 。這種將平面上的點 P 變成點 P' 的變換，即為旋轉變換或旋轉。學生學習旋轉變換，開始與直觀法學習平面幾何階段，透過認識生活中經變換的圖形，把玩一些實物圖形，都不難理解旋轉的含義。不過，當圖形放置到坐標平面中時，情況就會變得複雜。學生需要明晰變換下新圖形的位置，更準備地說，在旋轉變換下，原圖形中的點

的變化。在直角坐標平面中，點的位置可以透過坐標確定下來。於是，這種變換的結果實際歸結為要坐標變換。當然，我們亦可以說，將幾何問題代數化了。

教學流程

針對旋轉變換和坐標幾何的特點，我們設計了如下的教學流程：

策略一：動手操作，體驗過程（Rotate the right-angle triangle）

建立與學生以前的學習經歷，讓學生感受圖形旋轉的過程和結果。教師請同學出黑板演示並畫出一個直角三角形旋轉後的圖形（圖一）。旋轉方法各不一樣：順時針旋轉 90 度、逆時針旋轉 90 度、順時針旋轉 180 度和逆時針旋轉 180 度。



圖一 學生演示直角三角形的旋轉

同學完成圖形旋轉後，在黑板上畫出圖形位置發生改變後的形狀，教師進而總結每一種方向旋轉後的特點：

- (a) 圖形的旋轉涉及到線段的旋轉、點的旋轉；
- (b) 圖形的旋轉一定有一個旋轉中心（origin）；
- (c) 圖形的旋轉一定有一個旋轉的方向；特別，順、逆時針 180 度結果相同（亦可請同學在教室中站著，然後按照順時針、逆時針方向各轉動一次，「驗證」這種相同結果）。

策略二：層層發問，啓動思考 (questioning on the rotation of general triangles)

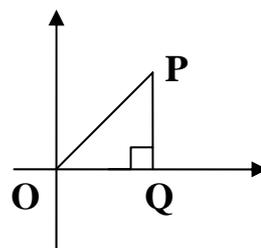
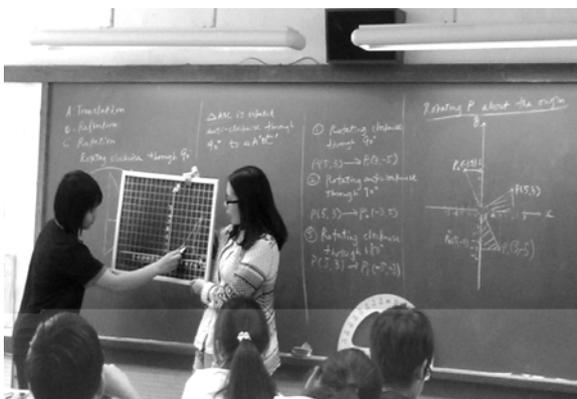
學生對旋轉有了直觀體驗，並能嘗試發現其中的規律。教師進而引出一些變式，讓學生討論，啓動深層思考：如果最初不是直角三角形，是一般的三角形，重複上面的四種旋轉，圖形會怎樣變化？由於旋轉的角度和圖形難以建立之間的聯繫，旋轉操作和畫圖變得困難。在同學討論過程中，教師帶出下一個問題：如何刻畫這種改變？亦即，圖形旋轉後，「跑」到哪裡去了？帶著這樣的問題，將授課的重心轉移至平面直角坐標系內。若我們未能輕易想像一般三角形在旋轉後的坐標，便可把三角形理解成三個頂點。考慮三個頂點旋轉後的坐標，從而得出整個圖形的位置。在直角坐標平面內，由於每一個點均有其唯一坐標，每一個點在坐標平面的位置是固定的，由不同點連接成的圖形（如三角形）也是固定的。透過旋轉前後點的坐標改變，我們能看到圖形具體的變化。最後引伸至所有幾何圖形的旋轉。因此教師先提出「點」在直角坐標上的旋轉。

策略三：逐步抽象，從點開始 (rotation of a point on the coordinate system)

基於策略二探索的結果，教師引入具體的例子，逐步抽象到一般情況。比如：直角坐標平面內的一個點 $P(5, 3)$ ，詢問經歷三種旋轉後的新位置（順時針 90 度、逆時針 90 度及順時針 180 度）。

- (a) 順時針 90 度： $P \rightarrow P_1$ ；
- (b) 逆時針 90 度： $P \rightarrow P_2$ ；
- (c) 順時針 180 度： $P \rightarrow P_3$

教師可請一位學生出黑板嘗試，在學生遇到困難時，教師給予提示：點 P 的旋轉其實歸結為線段 OP 的旋轉（如圖二）。透過介紹 P 點的坐標構成，引入坐標直角三角形 $\triangle OPQ$ ，將線段 OP 的旋轉問題轉化為直角三角形 $\triangle OPQ$ 的旋轉。這樣，又回到策略一的問題情境，從一般情況的討論又回到特殊問題的解決。教師亦可請學生在有坐標系的小黑板上記錄旋轉的結果（如圖）



$$\begin{aligned} OP &\rightarrow OP_1 \\ OP &\rightarrow OP_2 \\ OP &\rightarrow OP_3 \end{aligned}$$

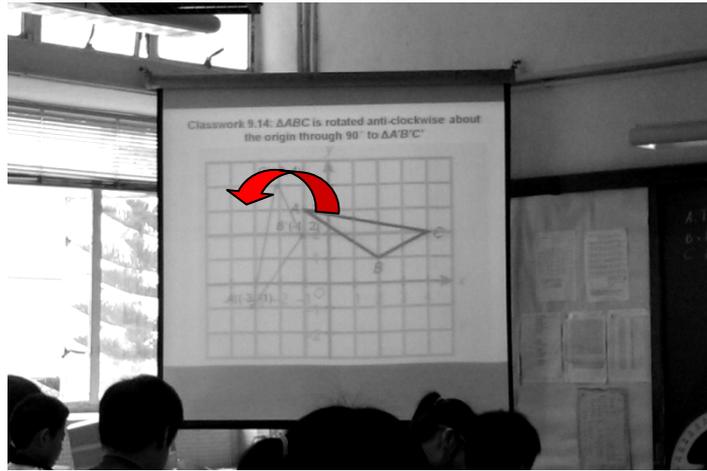

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &\rightarrow \triangle OPQ_1 \\ \triangle OPQ &\rightarrow \triangle OPQ_2 \\ \triangle OPQ &\rightarrow \triangle OPQ_3 \end{aligned}$$

圖二 從點到圖形的旋轉

策略四：動態演示，加深理解（demonstrate the rotation of a triangle by using software）

無論是學生出黑板做數，還是教師講解，均受到時間的限制（畫圖會用很多時間），不能把每一種旋轉一一在黑板演示。因為學生有了前面的探索、討論、做數的體驗，教師可借助課件，動態地演示圖形在不同方向旋轉的過程和結果（圖三），讓 PPT 真正能發揮作用。最後，可和學生一起總結圖形（三角形）旋轉前後的特點：圖形位置改變、大小不變；線段長度不變、角度不變。

學生在經歷動作表徵、形象表徵之後，通過逐步抽象，降低了學生學習的難度。有了這樣的鋪墊，最後教師再推廣至更一般性的情況： $P(x, y)$ 圍繞坐標原點順時針、逆時針旋轉 90 度倍數。



圖三 動態演示圖形的旋轉

總結

旋轉變換對於中學生來說並不容易掌握，這堂課的設計試圖透過多種方式讓學生體驗和理解旋轉。回顧整堂課的教學設計和實施，我們能看到，在講授時這樣一些元素體現在教學過程中：基於學生已有的知識，讓他們動手操作、自行探索發現。依據課堂的情景，教師透過層層發問，啟發學生討論和主動思考。特別，數學解難中用到的抽象與具體，特殊與一般等方法亦滲透其中。

參考文獻

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

作者電郵：張僑平 qpzhang@cuhk.edu.hk

吳文愷 mymanyang@gmail.com