

## 小學課程中的長度、路程和距離

香巧玲

將軍澳循道衛理小學

馮振業

香港教育學院數學與資訊科技學系

### 緒論

長度和距離，是小學生最早接觸的度量課題，在初小的三年學習裡，每年都會碰到（香港課程發展議會，2000）。不論從數學或科學的角度看，長度和距離都是十分重要的基礎概念，在不少其他課題或領域上都曾用上。單看小學數學課程，就會發現雖然高小課程內再沒有延續初小有關長度和距離的學習，但是潛在的應用情境，卻俯拾即是：周界、面積、體積、四邊形的特性、對稱、棒形圖、摺紙圖樣、截面、圓、圓周和速率，全部涉及長度或距離的應用。由此可知，長度和距離的學習，影響何其深遠。

另一相關的詞語——「路程」，見於全港性系統評估（見香港考試及評核局，2007），也曾引發教師的疑惑。由於課程文件並無就「長度」、「距離」和「路程」作出清楚的定義，要釐清它們的應用範圍及相互關係就變得無從入手。本文嘗試堵塞這個缺口，介紹一套可用於小學的定義，並指出日常的教學行為，如何與定義呼應。

正如一般的度量課題的教學一樣，處理長度和距離時，必須區分量度單位、量度工具和量度方法。為了避免論點分散，下文略去有關這方面的討論，集中探討與定義相關的教學行為。以下介紹的一套定義，邏輯順序是這樣的：

- （一）一段直線的長度
- （二）一段曲線的長度
- （三）由一點沿某路徑走到另一點的路程
- （四）點與點的距離

## (五) 點與直線的距離

此外，也可在一段直線的長度之後加插一段折線的長度，點與直線的距離之後加插直線與直線的距離、點與平面的距離及平面與平面的距離。除了一段折線的長度比較簡單之外，其餘的都不是一般學生可以應付，留待初中學習不遲。

### 一段直線的長度

#### 定義 1

一段（有起點及終點的）直線的長度，是指此段直線相當於某指定長度單位直線排起的倍數（小一教學時可用「個數」）。

應用時，必須於長度值之後標明長度單位。要量度一段直線的長度，方法是把長度單位沿直線累排至與此段直線同長，然後數得單位累排出現的個數。同理，由若干段直線首尾連起所得的折線，其長度可由組成的各段直線的長度相加而得。

小一「長度和距離」的其中一個學習重點，是以自訂單位量度物件（例如：數學課本）的長度。在學習活動過程中，學生以某自訂單位（例如：曲別針）一個一個地沿直線累排至與數學課本一邊同長（見圖一、二、三），所得的曲別針數量就是數學課本一邊（以此自訂單位量度）的長度（詳見馮、董、李，2000）。

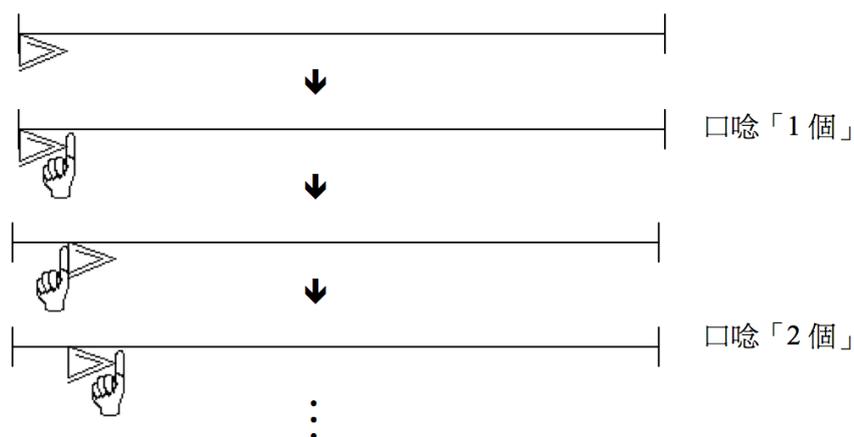


圖 1

（摘自馮、董、李，2000，頁 108）：當選定的自訂單位只得一件，須以手指作記號。

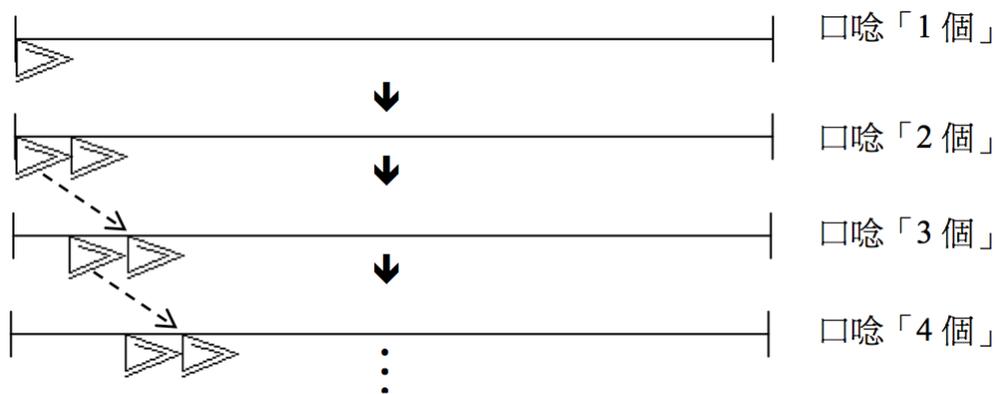


圖 2

(摘自馮、董、李，2000，頁 108)：當選定的自訂單位有兩件，便可交替使用。

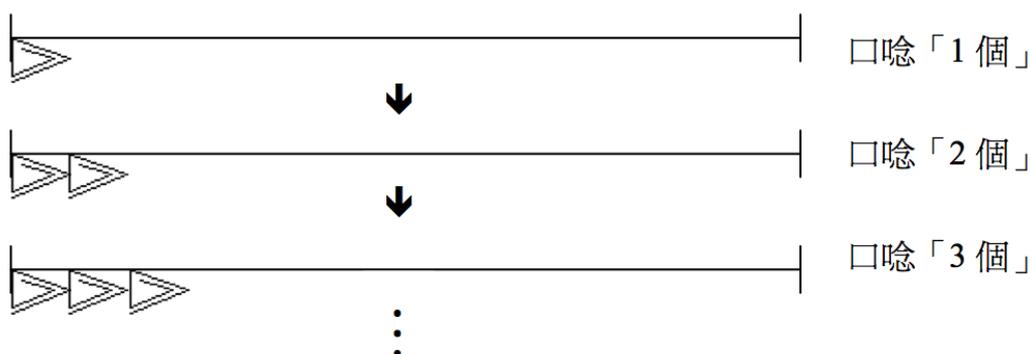


圖 3

(摘自馮、董、李，2000，頁 108)：當選定的自訂單位有多件，可以一氣呵成地排成一行。

課題的另一個學習重點，是要學生懂得以厘米為長度單位，量度物件的長度。依定義，必須沿直線把 1 厘米長度的紙條，一個一個地累排至與物件同長（見圖四）。由於這項工作會在日後的量度行為中重複出現，最理想就是可以只排一次，然後重複引用，厘米尺便是來自這種想法的一種工具。只要把 1 厘米的長度，一個接一個地沿直線刻在直尺上，再加上方便讀出量度結果的數字，就能製作一把厘米尺。

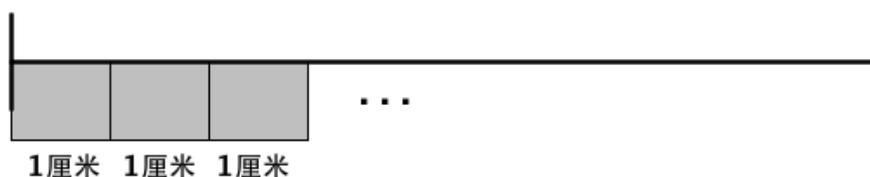


圖 4：用多個 1 厘米的公認單位，以直線累排成一行。

## 一段曲線的長度

如果一段曲線，像繩子一樣可以拉直，找長度並不困難，可惜一般情況並非這樣。由於長度單位一般不能被隨意屈曲，一段曲線的長度值，只能藉長度單位排成折線（若干段直線首尾連起而成）所得的長度值逼近。因此，量度一段曲線的長度時，通常只是量得一段與此曲線「接近」的折線的長度。從微積分得知，只要把逼近的折線之中的各段直線長度不斷縮短，折線的長度會趨向曲線的實際長度。

### 定義 2

一段曲線的長度，是指把它分割成很多段非常接近直線的線段之後，得到的總長度。

依定義，要量度圖 5 一段曲線的長度，只能藉量得 AB、BC、CD、DE 各段直線的長度，加起來作為一個約數。做法可以是分段在紙邊記錄各段直線的長度，最後量出總長（圖 6 和圖 7）。這種以直線測曲線，由已知測未知的處理問題的手法，是做數學的慣用技倆（見香港科技大學教育發展組（編），2000）。能讓學生早一點經歷，對高年級的學習會有莫大的裨益。然而，這種討論著眼建立一般理論，從而確立計算的方法，與小孩子著眼特殊問題，喜歡動手操作多於埋首計算的習性，不易完全配合。教師大可先從以直測曲的取向引入，其後提出如果可以運用繩子，請學生想想可以怎樣找到一段曲線的長度的約數。這樣結合，既可保留可擴闊視野的以直測曲想法，又可兼顧學生愛動手操作的訴求。

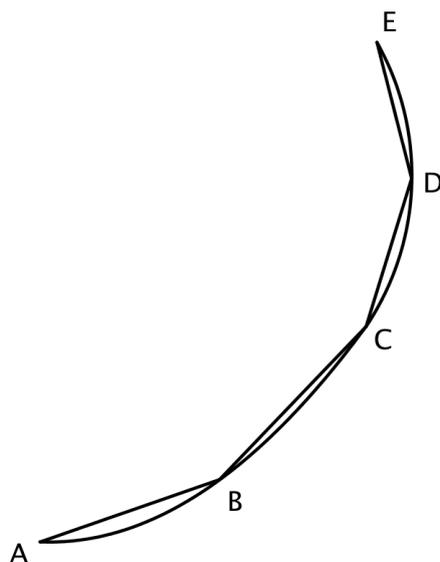


圖 5

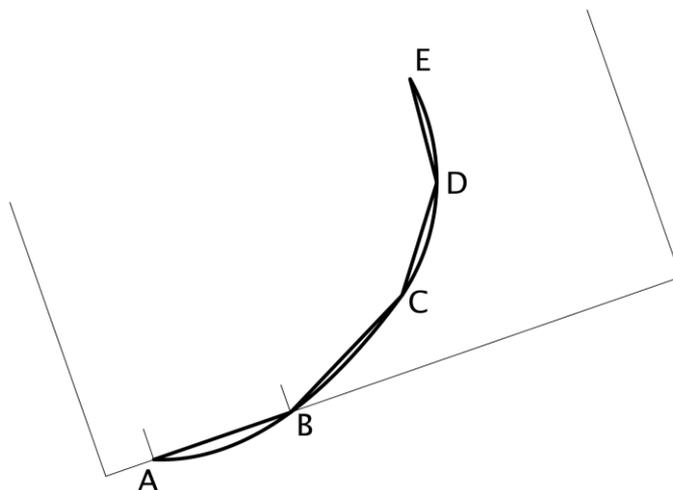


圖 6 (圖中紙張以透明方式顯示，以方便讀者理解當中的做法)

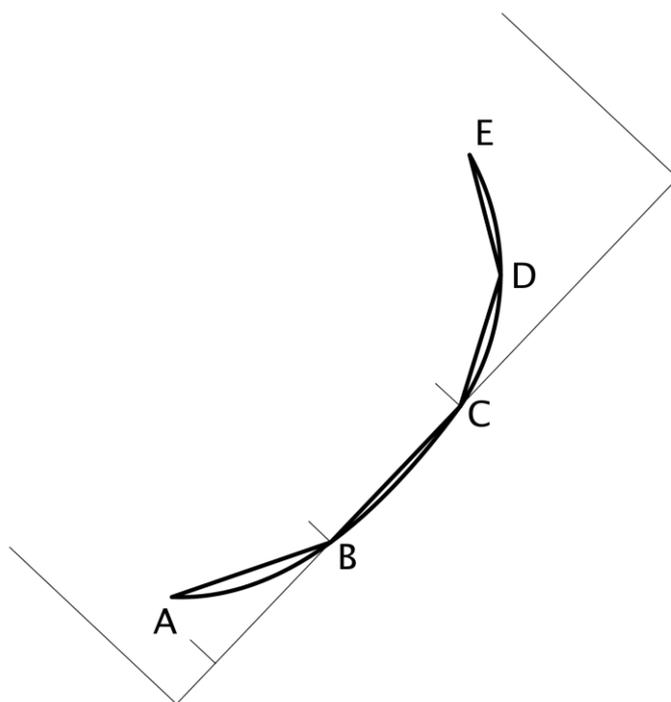


圖 7 (圖中紙張以透明方式顯示，以方便讀者理解當中的做法)

### 路程<sup>註</sup>和兩點的距離

#### 定義 3

由 A 點，沿路徑<sup>註</sup> C (直線、折線或曲線)，走到 B 點的路程，即 C 的長度。

由 A 點走到 B 點，可以沿不同的路徑，衍生不同的路程。這些路程的

最小值，稱為 A 點與 B 點的距離。

#### 定義 4

由一點走到另一點的最短路程，稱為兩點之間的距離。

在一個平面上，如無附加任何限制，兩點之間的距離即是連接兩點的一段直線的長度。從定義出發，圖八路徑 Y 的長度就是 A 點與 B 點之間的距離。

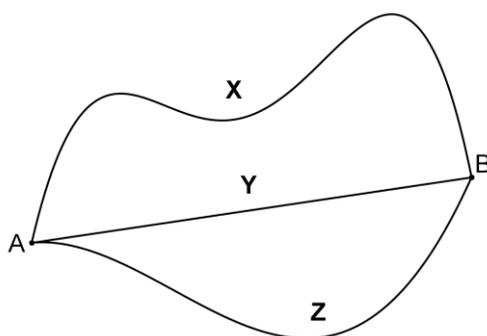
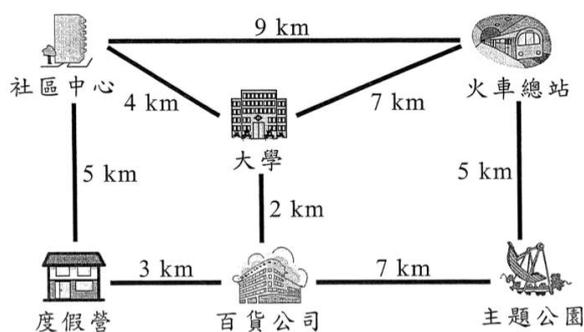


圖 8

然而，在生活環境中，沿直線走不一定可行。例如，從馬鞍山到香港教育學院（看作兩點），不飛天，不經水路，就不可能沿直線走。附加了只走陸路的限制，馬鞍山到香港教育學院的距離，就不是連接兩地的一段直線的長度。如果在球面上考慮距離，就更能突顯生活上應用的距離，不一定等同一段直線長度的事實。例如，從地球（姑且看作球體）南極走到北極，走直線要穿過地心。而航天或航海的最短走法，卻是沿經線走，即是走半圓。

香港小學數學課程（香港課程發展議會，2000）之內，並沒有「路程」這項學習內容。然而，在數學科全港性系統評估的考題裡，卻可找到「路程」一詞（見香港考試及評核局，2007）。例如，在 2007 年小學三年級數學 3MC1 試卷的第 19 題（見圖九）內，就出現有關「路程」的考題。題目中「路程」的應用，與本文介紹的一套定義完全吻合。(a) 部所指的「全程」即路徑「主題公園—百貨公司—度假營」的總長；(b) 部要找的路程，即路徑「火車站—大學—百貨公司—度假營」的總長，也可稱為火車站與度假營的距離。

19.



- (a) 從主題公園經百貨公司走到度假營，  
 全程共 \_\_\_\_\_ km。
- (b) 由火車總站前往度假營，最短的路程要走  
 \_\_\_\_\_ km。
- (c) 姐姐從社區中心往主題公園，走了 14 km 的路，  
 比最短的路程多走了 \_\_\_\_\_ km。

圖 9 (2007, 3MC1-19)

### 點與直線的距離

有了點與點的距離的認識，要定義點與直線的距離並不困難。最自然的方法，是借助兩點的距離定義點與直線的距離。

#### 定義 5

由一點走到一條直線上的最短路程，稱為這一點與這一條直線的距離。

換言之，要找 A 點與直線 L 的距離，就要找 A 點與直線 L 上一點的距離的最小值。這裡要分清「點與一條直線的距離」和「點與一段直線的距離」。圖 10 中 A 點與直線 L 的距離，即 P 點在直線 L 上移動，線段 AP 的長度的最小值。通過 A 點畫直線垂直於 L，並與 L 相交於 B，線段 AB 的長度就是 A 點與一條直線 L 的距離。如果考慮圖 11 中 A 點與線段 PQ 的距離，應是線段 AQ 的長度，因為這是從 A 點走到線段 PQ 的最短路程。畫垂直線得到的線段 AB 的長度，並不合用。

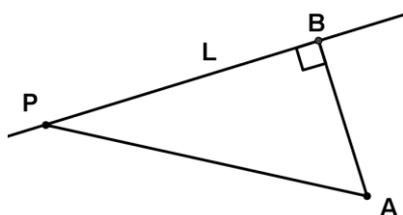


圖 10

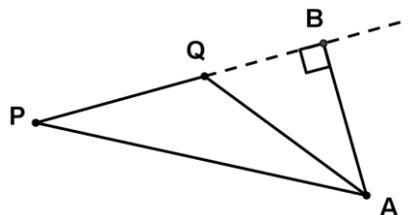


圖 11

要引入點與直線的距離，最適合應該是在教授小三「平行和垂直」期間。教師可以透過一個情境的討論（例如：小黃狗到河邊喝水），讓學生探索在圖 10 的 A 點走到直線 L 的最短路程，即由 A 點畫一垂直線到直線 L，從 A 點到交點 B 的距離就是 A 點與直線 L 的距離。一方面既可呼應已學的垂直線概念和畫法，讓學生運用已有的知識和技巧去建構新的數學知識（馮，2007），另一方面亦可提供有效的平行線檢測法，令學生有法可循，不用時時依賴直觀（詳見楊，2007）。

儘管課程文件不提點與直線的距離，它在高小的學習裡還是有它的角色的。教授小四「對稱」時，點與直線的距離是無法迴避的。當學生要補回一個軸對稱圖形的缺去部分時，應從圖形中的已知點，畫垂直線穿過對稱軸，先找已知點與對稱軸的距離（圖 12），然後在對稱軸另一方找到等距的對應點（圖 13）。

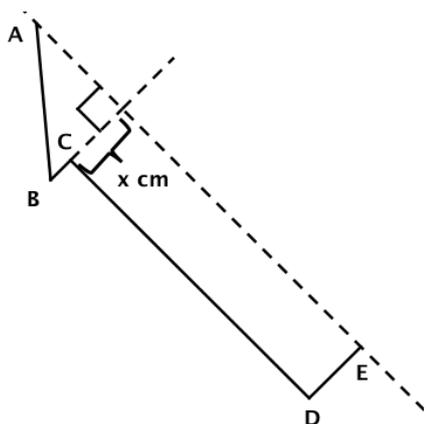


圖 12

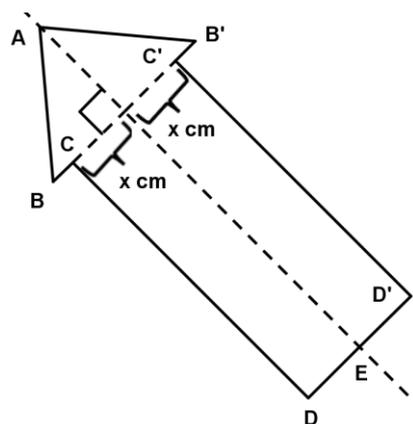


圖 13

教授小五「三角形面積」時，點與直線的距離再次出現。學生由三角形的其中一個頂點 X，畫直線垂直於對邊，並與它或它的延長線相交於 Y（圖 14）。如果以 X 的對邊為底，XY 就是對應的高，它的長度就是 X 與它的對邊所在直線的距離。

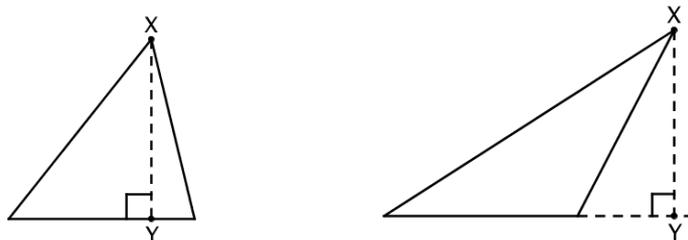


圖 14

## 直線與直線的距離

在平面上，兩條直線不是平行，就有交點。在兩直線相交的情況下，從其中一條走到另外一條的最短路程是 0，只要站在交點上就可得到。換言之，任何兩條相交的直線的距離都是 0。在兩直線平行的情況下，從其中一條之上的任何一點，走到另外一條直線的最短路程都是相同的，稱為此兩條平行線的距離。要引入平行線的距離，最適合是在小三教授「平行和垂直」的時候。從平行線的定義：「當兩直線無論怎樣延長也不相交，便稱它們是互相平行」，引向具體的檢測法時，會在某一直線上隨意選兩點，分別找出這兩點走到另一直線的距離，若兩者的距離相同，則這兩直線互相平行（詳見楊，2007），而這個距離就是兩條平行線的距離。如果延至小五教授「平行四邊形面積公式」時才介紹，恐怕又要耗掉一些重溫的課時。

在小五教授「平行四邊形面積公式」時，學生要應用已學的平行線距離，來找出平行四邊形對應的底和高。學生由平行四邊形的一個頂點  $X$  或一邊上的一點  $X$ ，畫一垂直線到對邊，並與它或它的延長線相交於  $Y$ （圖 15）。如果以  $X$  的對邊為底， $XY$  就是對應的高，它的長度就是  $X$  與它的對邊所在直線的距離。

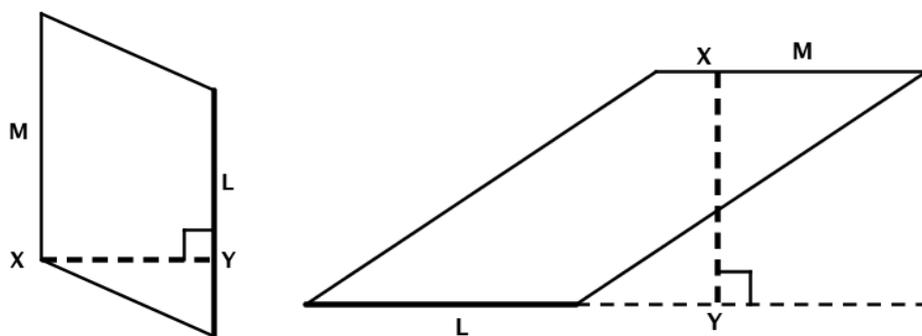


圖 15 (Y 點是由 X 點到直線 L 的垂足)

當平行四邊形內畫了不同長度的線段時（如圖 16），如何有效辨別平行四邊形的底高對，是教學工作的一個重要關口。教師可令學生先確定各組平行線，用虛線延長，並加上適當標記（圖 17）。接著找出平行線  $AB$  和  $DC$  距離的線段，並與相應的底配對起來（圖 18）。同理可處理平行四邊形其餘兩組的底高配對，此處從略。

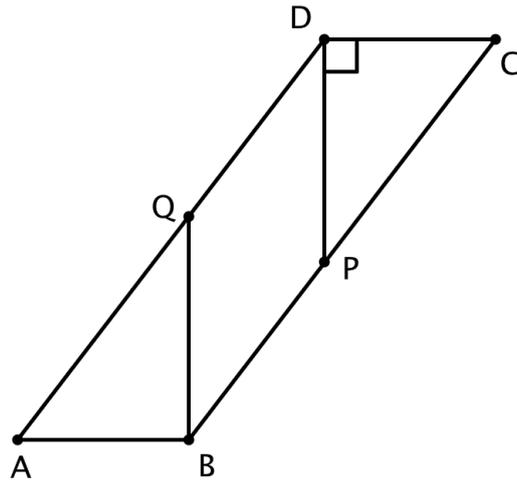


圖 16

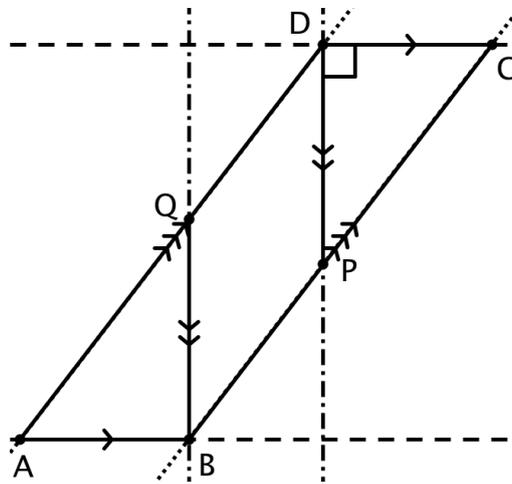


圖 17

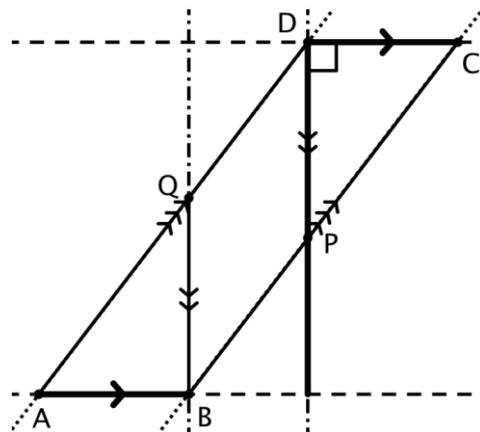


圖 18

(只配對一組底高，教室內可用色彩配對其餘兩組。)

### 點與平面的距離

沿用上述的思辨手法，可定義點與平面的距離為：「由點走到平面的最短路程」。如果不用計算錐體的體積（目前香港小學的情況），是可以不談點與平面的距離的。然而，教學過程或許會觸及「錐體的高」（例如：教師或學生會說：「那錐體高一點」），教師必須指出它的意義是錐頂至錐底所在平面的最短路程（圖 19 中  $VF$  的長度）。至於這路程是沿哪條路徑得出，恐怕要留待初中討論了。不過，在底是正多邊形的情況下，如果錐頂至錐底中心（其實是錐底的旋轉對稱中心，也是所有對稱軸的交點）的距離，剛好是由錐頂至錐底所在平面的最短路程（即  $C$  與  $F$  重疊），角錐的側稜便會全部同長，這樣的角錐叫正角錐。同理，如果圓錐頂至錐底圓心的距離，剛好是由錐頂至錐底所在平面的最短路程，圓錐就叫正圓錐（也可叫直立圓錐，見圖 20）。

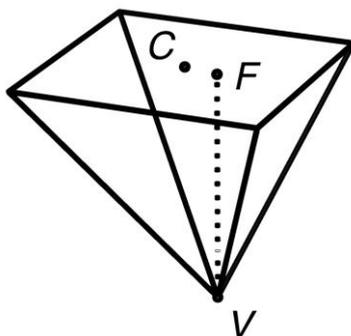


圖 19

（ $C$  為錐底中心， $VF$  為錐頂  $V$  至錐底所在平面的最短路徑。）

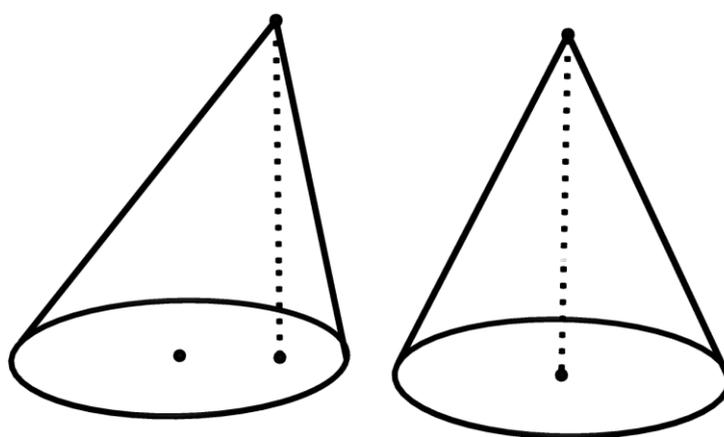


圖 20

（左面的是斜圓錐，右面的是正圓錐，虛線為錐頂至錐底所在平面的最短路徑。）

## 平面與平面的距離

平面與平面的距離，有可能在柱體教學時碰上。在不計算柱體體積的情況下（目前香港小學的情況），是可以迴避的。若要定義，自然應是「由一個平面走到另一個平面的最短路程」。當角柱的側稜均與兩底垂直（是直線與平面的垂直），或連接圓柱兩底的圓心的直線均與兩底垂直（是直線與平面的垂直）時，就稱它們直立柱（圖 21 第一柱及第三柱）。明顯地，直立角柱的高（即角柱兩底所在平面的距離）其實就是側稜的長度。一般而言，角柱的高不超過側稜的長度，斜角柱（非直立角柱）的側稜長度必超過斜角柱的高（圖 21 第二柱）。同理，連接圓柱兩底圓心的線段如果垂直（是直線與平面的垂直）於兩底，這線段的長度就是圓柱的高，這圓柱叫直立圓柱（圖 21 第三柱），其他情況就叫斜圓柱（圖 21 第四柱）。長方體和正方體都是有三對底的特殊角柱，長、闊、高分別對應三對底的對應高。由於直線與平面垂直不在課程之內，上述討論即使在課堂出現，也只好點到即止。

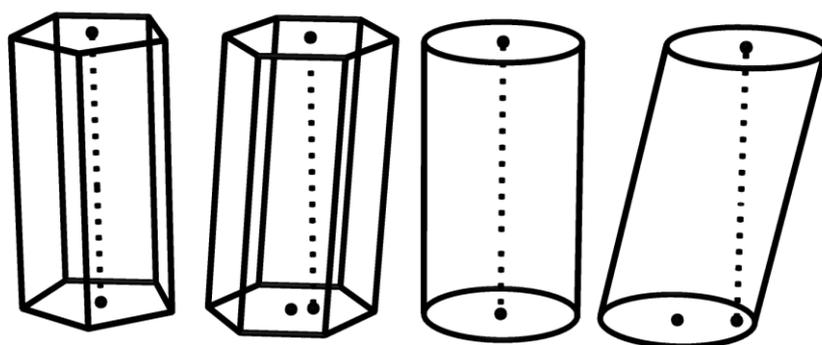


圖 21

（從左至右，第一及第三為直立柱，第二及第四為斜柱，虛線為從一個柱底所在平面，走到另一柱底所在平面的一個最短路徑。）

## 距離概念的推廣

一般而言，如果對兩個非空點集  $S_1$  與  $S_2$ ，以下集合存在最小值  $d$ ，則可定義  $d$  為點集  $S_1$  與點集  $S_2$  的距離。

$$\{a \text{ 與 } b \text{ 的距離} : a \in S_1, b \in S_2\}$$

這裡點集  $S_1$  與點集  $S_2$  可以是只含一點的集，也可以是包含直線或曲線上的所有點，甚至是包含平面或曲面上的所有點的集。明顯地，如果兩點

集的交集非空，兩集的距離就是 0。雖然小學師生均會對這個定義感到陌生，甚至心理上覺得嚇人，但現實裡人還是會直觀地用上這個推廣了的距離概念。例如，在一節有關圓周計算的課上，就碰過學生把圖 22 中的 BC，說成兩個同心圓的距離。可見即使課程沒有，教學上還是有機會遇上距離概念的推廣。

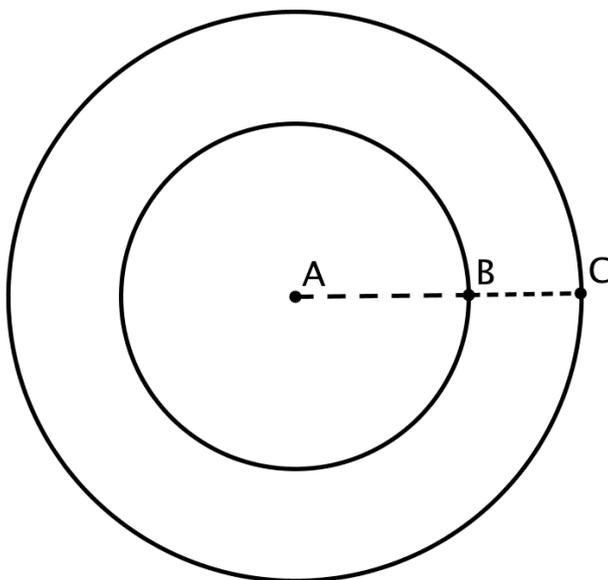


圖 22

### 結語

很多人認為，長度和距離只是初小階段的數學概念，本文揭示事實並非如此。長度和距離，在很多高小的課題中也會碰到，有時甚至以更一般的形式出現。因此，教師值得花點課時和氣力，認真處理它們的教學過程。

本文介紹了一套可用於小學的定義，涵蓋了線段的長度、點與點的距離和點與直線的距離。當中加插了路程作為概念之間的跳板，令點與直線的距離的討論，可以更有效地進行，也同時釐清了見於考題的「長度」、「距離」和「路程」三者的應用範圍和相互關係。在點與直線的距離之後，還有直線與直線的距離、點與平面的距離和平面與平面的距離，都可能在高小觸及。除了直線與直線的距離可以從學生的已有知識完整地建構之外，其他的均涉及直線垂直於平面的概念，不容易憑學生的已有知識完全瞭解。在欠缺足夠的學理基礎之下，這些討論只能點到即止。儘管如此，教師授課時也應注意用詞，避免引致不必要的混亂。

註：「路徑」和「路程」通常用於表達陸路的行程，於航天或航海，會用「航道」和「航程」。

## 參考資料

香港考試及評核局(2007)。《2007年全港性系統評估數學科學生基本能力考卷 3MC1》。  
於2010年12月10日，下載自

[http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2007priPaper/P3Math/2007\\_TSA\\_3MC1.pdf](http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2007priPaper/P3Math/2007_TSA_3MC1.pdf)

香港科技大學教育發展組(編)(2000)。《小學數學教育研究工作坊(連講學光碟)》。  
香港：作者。

香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：教育署。

楊思敏(2007)。數學化教學：垂直和平行。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信(編)。  
《香港數學教育會議2007論文集》(頁173-179)。香港：香港數學教育學會。

董麗紅、李蘊珍、馮振業(2000)。小一長度量度的教學。載梁興強(編)。《香港數學  
教育會議2000論文集》(頁102-108)。香港：香港教育學院數學系。(後收入吳丹  
(編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁237-243)。香港：  
香港數學教育學會。)

首作者電郵：[gladysheung@yahoo.com.hk](mailto:gladysheung@yahoo.com.hk)