

## 「華容道」遊戲概說

黃志華

### 華容道遊戲一般玩法與佈局分類

據吳鶴齡編著的《七巧板、九連環和華容道 —— 中國古典智力遊戲三絕》(科學出版社, 2004 年 10 月初版, 後文將簡稱《七九華》)一書所說,「華容道」這個智力遊戲應該是近代從西方傳入中國的,不過,經過多年的漢化,已完全發展出自己的面貌。

「華容道」遊戲屬於滑板塊類的遊戲,西方統稱為 **Sliding Block Puzzle**。如圖一,長方型的棋盤,有十個棋子,2 × 2 的大方塊棋子有一個,代表曹操;1 × 2 的長方塊有五個,分別代表劉備手下的五員大將:關羽、張飛、趙雲、馬超、黃忠;另外有 1 × 1 的小方塊四個,代表小兵,有時這些小兵也各有名號,如「兵」、「卒」、「勇」、「士」。遊戲的要求是把棋子平移,設法讓曹操移到出口處(圖一的出口設在下方,但改設在上方亦無不可),便算成功。圖一所展現的陣勢,是一個經典的佈局,名為「橫刀立馬」,目前所知的最優解法需 81 步。



圖 一

中國人玩「華容道」,一直以「曹操逃出」為解題目標,並為此設計出很多不同的佈局,而佈局則習慣以陣勢裡橫放的長方形棋子的數目來分

類，比如上面圖一的佈局，五個長方形棋子有一個是橫放的，所以屬於「一橫」類，其他的類別就有二橫類、三橫類、四橫類、五橫類以及無橫類。

### 幾個網址

論述和研究「華容道」遊戲的專著不多，文首提及的《七九華》是最新的一本了。不過，近一年來，內地有不少擅於編寫程式的網友，借助電腦程式來研究「華容道」遊戲，取得許多人們難得一見的結果，相比之下，《七九華》裡所記載的許多「華容道」遊戲的資料，便顯得過時及片面。所以，筆者建議對「華容道」遊戲有興趣的讀者造訪下列幾個網址，從中可以找到「華容道」遊戲很多有用的資料，而且相信都是比較新的。

<http://fayaa.com/youxi/hrd/>

<http://www.2maomao.com/blog/hrd-openings-and-hardest/>

<http://yegycy.blogspot.com/>

[http://blog.chinaunix.net/u/14418/article\\_110750.html](http://blog.chinaunix.net/u/14418/article_110750.html)

在第一個網址裡，還有一個「自定義關卡」的線上求解「華容道」遊戲的程式，只要依法輸入佈局，即可知道它的最優解步法（當然有時是會無解的。此外，這些最優解法是以電腦程式以窮竭搜尋法得出的，但這種「最優」卻未經數學上嚴格證明的，為省篇幅，下文凡說及「最優解」或「最少步數」，如無特別說明，都只是指以電腦程式搜尋出來的，尚未經數學上的嚴格證明）。而第四個網址，是筆者在自己的博客裡所寫的有關華容道遊戲的文章的總匯處。

用電腦程式研究「華容道」遊戲，很取決於研究者自己對「華容道」遊戲的熟悉程度及思索深度，如果不夠熟悉或思索得不深，得到的結果也不會豐碩。比如說，像圖二的二橫類經典佈局《守口如瓶》，最優解是 100 步，當比對一下人們早年所發現的最優解步法，竟與近年以電腦程式搜尋出來的步法有頗多的不同，可是步數卻同樣是 100 步，這才知道，原來《守口如瓶》是有兩種最優解的步法的。因此，除非編寫程式時特別注意到有些佈局有多於一種最優解的步法的情況，否則用程式搜索，永遠不會知道原來有些佈局有兩種最優解步法。

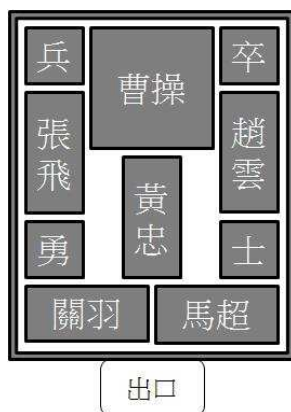


圖 二

### 各類最難解佈局的終極結論

回說在《七九華》一書所載的資料，該書謂：

- 一橫最易解佈局 32 步，最難解佈局 84 步；
- 二橫最易解佈局 56 步，最難解佈局 103 步；
- 三橫最易解佈局 40 步，最難解佈局 120 步；
- 四橫最易解佈局 69 步，最難解佈局 87 步；
- 五橫（只有一種）佈局 34 步。

這裡的步數是指某個佈局最優解的步數。當然，最優解步數最長的佈局，未必一定是最難解的，難解的感覺常因人而異。但正因為這樣，以最優解的步數的長短來衡量佈局的難度，卻是比較客觀的。經過近年網友以電腦程式作窮竭式搜索，最易解佈局其實是沒甚麼意義的，而在最難解的佈局方面，則得到了這樣的「終極」結論（同樣地，這些有關「最難解」的結論是否屬於「終極」，還有待嚴格的數學證明）：

- 無橫最難解佈局 19 步；
- 一橫最難解佈局 93 步；
- 二橫最難解佈局 138 步；
- 三橫最難解佈局 135 步；
- 四橫最難解佈局 97 步；
- 五橫最難解佈局 56 步。

這六種最難解佈局的圖式如下面的圖三（每一個佈局的出口俱在棋盤下方正中處。又，以下的附圖，如無特別說明，就表示出口在下方正中）：

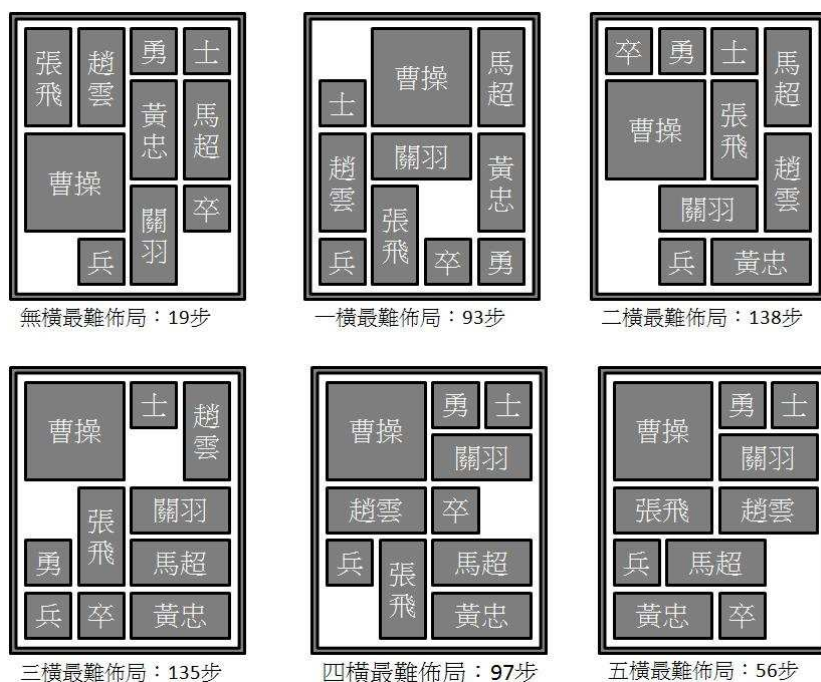


圖 三

既然「終極」結果都得出了，是否意味華容道遊戲再沒有甚麼值得研究呢？這當然不是，至少，我們還很難用數學方法去證明這些結果的對與錯，這方面是有大量工作等着我們去做。其次，「曹操逃出」只是華容道遊戲的一種玩法，可是這智力玩具本身還潛藏很多很有意思的玩法，正待人們開發。再說，單是在「曹操逃出」的玩法裡，也還有不少現象是值得仔細探究的，且容在後文敘述。

### 指定終局玩法

近一年來，筆者在網上跟內地幾位擅於編寫電腦程式的好手交流，他們的網名是 Leo Jay、半瓶墨水和 Guoyang，由是得出了不少的心得和開拓出若干難度很高的玩法。下文試作扼要的縷述。

其實，泰國人玩這個智力玩具，玩法就跟中國人很不同，這個《七九華》一書也有談及。泰國人的玩法，可稱為「指定終局」。以集合論的角度觀之，「曹操逃出」是一種特殊的「指定終局」罷了。細究一下，一般「指定終局」在玩的時候需要關注多個棋子的位置，但「曹操逃出」的玩法則常常只用把注意力放在大方塊棋子便成，對人類而言，後者是容易操作、容易思考得多。

在「指定終局」裡，有幾種特別的「指定」是很方便人們研究的，因為這些「指定終局」乃是原來的起始局面的鏡像。筆者習慣以鏡影、倒影和反影來稱之，具體例子見圖四（這裡以四橫最難解的佈局為示例）：

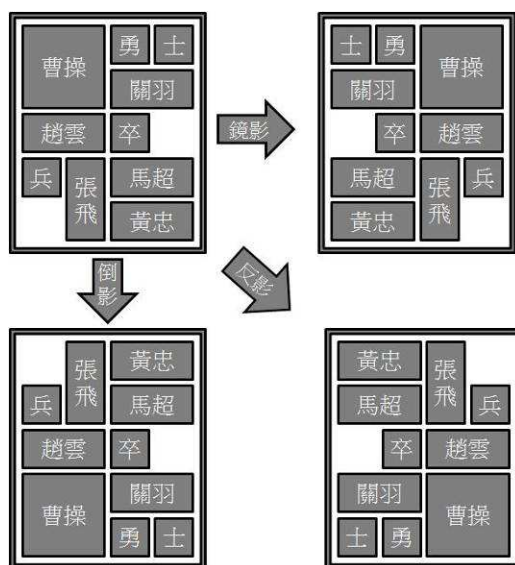


圖 四

這圖四裡顯示的其實是「四橫最難佈局」的三個「嚴格」鏡像局面，即嚴格鏡影、嚴格倒影和嚴格反影，因為終局時每一個棋子都必須在指定的位置。這是華容道遊戲裡非常艱難的玩法。要減低難度，可以像圖五的那樣，完全不理會棋子的名稱，只要成功地移成所指定的局面形狀，就算成功。為區別於上面的嚴格鏡像局，這一類佈局筆者稱為普通鏡像局。

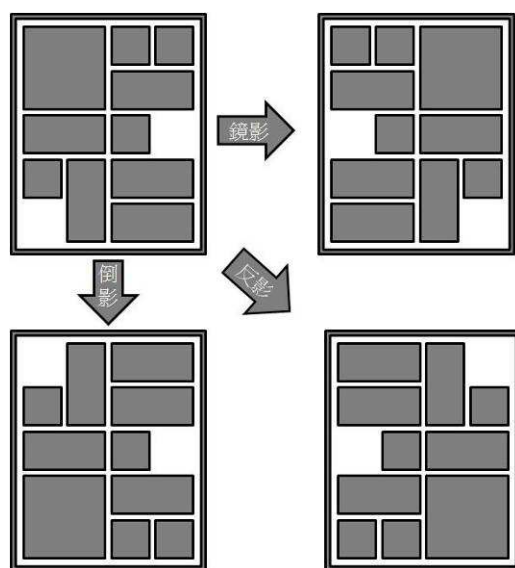


圖 五

據網友 Guoyang 以程式搜尋的結果，在普通鏡像局之中，解最難的普通鏡影局最少需要 165 步，解最難的普通倒影局最少需要 262 步，而解最難的普通反影局最少需要 268 步。後二者比起最難的「曹操逃出」佈局的 138 步，多出百多步，筆者覺得那簡直是非人玩意！Guoyang 同時也搜尋出下面的數據：

解最難的嚴格鏡影局最少需 239 步；

解最難的嚴格倒影局最少需 283 步；

解最難的嚴格反影局最少需 282 步。

這樣對比起來，嚴格鏡像局跟普通鏡像局的難度相差並不算大，但對於人類來說，嚴格鏡像局的玩法單是感覺上便難如登天。

為了讓讀者有一點感性的認識，下面介紹一則最易解的嚴格反影局，最少 48 步就可以完成任務。其圖式見圖六：

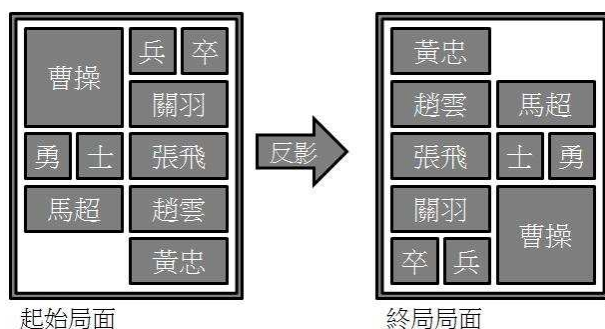


圖 六

圖六的解法，筆者以最傳統的棋步紀錄方式來陳述，「曹」自然是代表大方塊棋子，而「關」代表橫放的棋子，「飛」代表豎放的棋子，「兵」代表小方塊。又，凡棋子連走兩格，不會特別說明，只有在僅移一格的時候才會特別說明。

關下，二兵下，曹下，二兵左，四關上，  
關右，兵下折右，兵左折下，曹下，二兵下，關左，四關上，  
二兵右，曹下，兵下折右，兵左折下，關下，關左，三關上，  
兵上折右，曹右，兵下，兵左折下，二關下，關左，二關上，  
兵上折左，兵上，曹右，兵右折下，三關下，關左  
(嚴格反影局面完成，共 48 步)。



圖 七

這裡還想介紹一個筆者設計的玩法：如圖七的局面，遊戲的要求是把「馬超」和「黃忠」的位置對調，而調好之後其餘各個棋子卻必須保持原位不變。以五橫類佈局來說，這樣的玩法不算難，但要達到最少的步數，卻是很傷腦筋的。根據程式，求出了以下的最優解法：

二兵右，關上，曹上，二兵上，關左，關下，二兵右，  
曹下，關左，關上，二兵上，關上，關右，曹下，關下，關左，  
二兵下，關右，二關上，兵左，兵下折左，兵左折下，關右，  
兵上折左，兵左折上，兵右，曹上，關左，關下，二兵下，  
二關下，關右，二兵上，曹上，二兵左，關上，關右，二兵下，  
曹下，關左，關下（「馬超」和「黃忠」成功調換位置，共 52 步）。

由是可見，華容道遊戲潛藏着無限的玩法，有待大家去設想和開發。

### 定式問題

以上所介紹的結果，可說全都是借助電腦程式得到的。但顯然都全部缺乏嚴格的數學證明的。對筆者來說，有些情況是特別渴望知道數學上的有關證明的，比方說，以圖一所示的那個經典一橫佈局「橫刀立馬」而言，它的普通倒影局和普通反影局都是無解的（嚴格的倒影和反影局估計更不會有解了）。照目前觀察所得，看來所有一橫局的倒影局和反影局都是無解的。這方面，電腦程式只會忠實告訴你無解。但為甚麼無解，看來就非得用數學方法來證明不可。這個問題，恕筆者孤漏寡聞，並不知道有沒有數學家研究過，而在網上搜尋，則並沒有任何收穫。至於證明起來難不難，也是完全不知的。

事實上，說到數學方法的應用，研究華容道遊戲還很需要數學研究裡常常用到的歸納方法。比如筆者就發現，大部份的二橫類佈局，其最優解都要經過圖八裡的兩個定式中的某個；大部份的三橫類佈局，其最優解都要經過圖九裡的兩個定式中的某個（這方面，電腦程式是不會告訴你甚麼的）。於是筆者就歸納了這些情況，並進而猜測會不會所有最優解超過 100 步的二、三橫佈局，都必須經過這些定式。後來得到 Leo Jay 用程式作窮竭式搜索來查驗，結論是：在所有的二橫佈局裡，凡最優解步數在 97 步或以上的，都必會經過定式；而所有三橫佈局裡，凡最優解步數在 89 步或以上的，都必會經過定式。這個未經數學證明的結論，至少初步證實了筆者的歸納與合情推理是正確的。筆者其後根據這個初步結論，找到一對互為倒影的二橫佈局（局面見圖十），它們的曹出玩法的最優解都是 96 步，換句話說，圖十裡的兩個互為倒影的佈局，不管出口是設在上方正中處還是下方正中處，「曹操逃出」玩法的最少步數都是 96 步，而在求解過程中，是沒有經過定式的。更有意思的是，這對佈局也恰好就是 Guoyang 所指的「最難解的普通鏡影局」，最少要 165 步才走成鏡影。

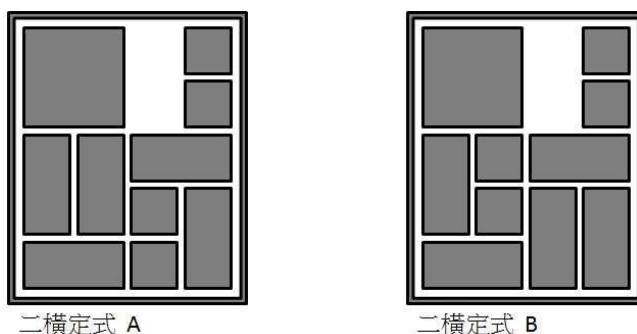


圖 八

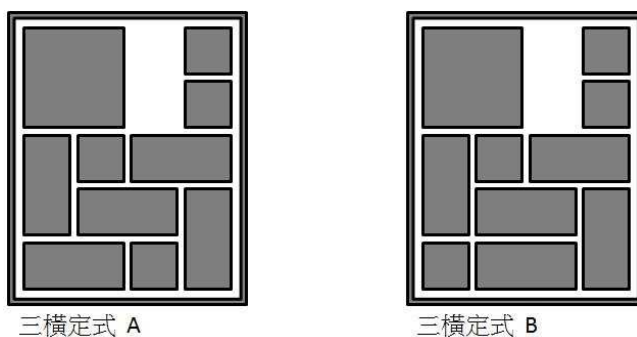


圖 九



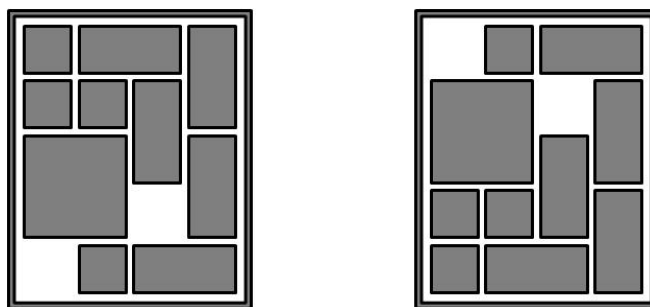


圖 十

### 歧形問題

此外，筆者為了更好地研究二、三橫佈局裡常有一個局面有兩種最優解的情況，定義了一種叫「歧形」的局面。那定義是這樣的：

在同一個二橫類或三橫類的佈局裡，如果走動甲棋子則以通往定式 A 為最優解，但假如走動乙棋子則以通往定式 B 為最優解，而這兩個最優解的步數是相等的。這樣的佈局，稱為「歧形」。

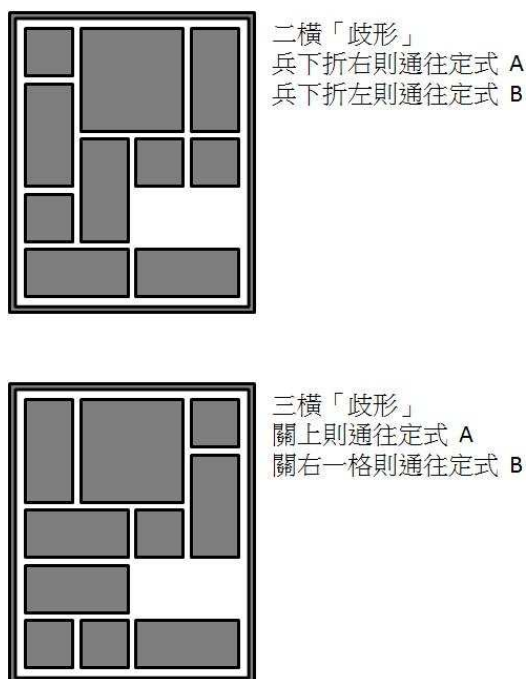


圖 十一

有了這「歧形」的概念，並找出具體的「歧形」(見圖十一)，才可以實行用電腦程式來探索這類「一題有二解」的佈局的數量的多寡。據 Leo Jay 的搜索，得知二橫類而經過上述「歧形」的佈局至少有 400 局；三橫類而經過上述「歧形」的佈局至少有 200 局。不過，Leo Jay 表示暫時想不到具

體的方法去用程式搜索二、三橫類佈局裡，是否存在更多的「歧形」。再說，這個研究只集中在二、三橫佈局之中，可是其實一橫及四橫佈局也有好些定式，而且定式的數量都多於兩個，那麼是否存在一橫或四橫的「歧形」呢？這也是有待探索的。

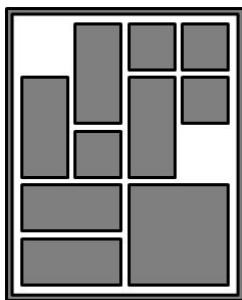
### 總局數的估計

對於華容道遊戲的研究，編程好手通常都先會從具體局數和局面入手，所以這方面的數據是甚詳細的，比如據半墨瓶水的搜索結果，「曹操逃出」玩法的所有可能的終局是 684 局，從這 684 局逆推出華容道所有可求解的佈局，含鏡像的有 263977 個，不含鏡像的有 132156 個。

不過 Guoyang 所得的數據又有所不同，他從 684 個終局求得的可求解佈局總數是 121969 個，比半瓶墨水求得的略少。而 Guoyang 的搜索曾嘗試連無解的佈局也計算在內，這時他得到的總局數是 363494 個，篩去可互為鏡像的佈局之後，局數降至 181962，如再篩去上下對稱或旋轉對稱的話，局數便餘下 90981 局(按：以上的數據俱可在前文所列的兩個網址內找到)。

二人求得的局數雖有差別，但至少說明華容道遊戲的佈局總數應該不會少於 90000 個。這數字委實很大，只是從實際的觀察，解法近似的同構佈局（這主要是指曹操逃出的玩法而言）也是很多的，換句話說，一個解法獨特的 X 佈局，往往有數百個同構佈局，這些同構佈局只是開始的幾步與 X 佈局不同，再之後的步法就跟 X 佈局完全相同。故此真有意思真有挑戰性的佈局其實是不太多的，大抵一千個都不夠，而且這只能由人腦挑選，電腦程式倒是難以幫上忙。

無論如何，由於使用程式去搜尋，幾乎所有有解的佈局都給搜索出來了，我們的眼界得以大開。比如說傳統的華容道曹操逃出玩法佈局，總是傾向把曹操置放在距離出口最遠的地方，可是其實有好些佈局，曹操距出口只有一步，卻要花上百來步才能成功走到出口！比如圖十二所舉示的二橫類佈局，就是一個好例子，它最少需要 105 步才能讓曹操從下方出口逃出去。世上許多事物，都存在這種似乎違反直覺卻合情合理的情況。此外，值得補充說明的是，圖十二這個佈局本身就是一個「歧形」，並且由於它的第一步僅有兩種走法（兵下或飛上），而兩種走法都能取得 105 步的最優解步數，這明顯是一個佈局家族的「頂點」，即再沒有別的佈局能經過它。



圖十二

最後還是想強調，曹操逃出只是華容道遊戲玩法之一，它潛藏着無數可能的有趣玩法。事實上，單是鏡像玩法，就已經可以把一個「曹操逃出」佈局化成最多達到六種的玩法！

作者電郵：[mou\\_wa\\_jai@yahoo.com.hk](mailto:mou_wa_jai@yahoo.com.hk)