根式的疑惑[1]

許慧貞

引言

初中階段學習根式，必定會涉及一些特別的運算技巧： 將根式簡化，例如 $\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$，或是將分母有理化，例如 $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$。學生難以單從表面理解這些做法的意義——將 $\sqrt{12}$「簡化」為 $2\sqrt{3}$，但後者的結構比前者更複雜；所謂分母有理化更是多此一舉，為何 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 比 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 佳，維持原狀不是更簡潔嗎？

根式的真確值與近似值

回應上述問題，要從根式的性質說起。先看看正整數 1 至 10 的平方根：雖然 $\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、……、$\sqrt{10}$ 這 10 個數字都有根式（radical）之形，實際上它們分屬兩大類，有 3 個是正整數：$\sqrt{1} = 1$、$\sqrt{4} = 2$ 及 $\sqrt{9} = 3$；其餘 7 個——$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{8}$ 及 $\sqrt{10}$ 是無理數，稱為不盡根式（surd），它們的小數表達是無盡不循環小數，即是說，小數無法百分之百表達它們的真確值，我們只能因應所需的準確程度取若干個小數位，變相就是近似值；如果要表達它們的真確值，必須維持使用根式，別無他途。

一般而言，如果我們不需要真確值，使用小數沒有問題，輔以計數機更是無往而不利。例如，要「計算 $\sqrt{3}$ 比 $\sqrt{2}$ 大多少」，或「求一個直角邊是 4 和 7 的直角三角形的斜邊有多長」，小數表達便派上用場了；但是在數學上我們總會遇到一些需要真確值的情境： 要說明 $\sqrt{3}^2 = 3$，我們總不能滿足於 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \approx 1.73205\times1.73205 \approx 2.999997 \approx 3$ 吧；等邊三角形（邊長為 a）的面積公式 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 和我們熟悉的圓面積公式 πr^2 同樣是以真確值為依歸。

---

1 筆者將本文的討論局限於平方根，即二次根式，不失其普遍性，亦符合本港初中數學課程的要求。

試比較下列兩題同涉及 sin 15° 的數：

(1) ΔABC 的邊長 $AB = 6$ cm，$BC = 10$ cm，$\angle B = 15°$，求 ΔABC 的面積。

(2) 分別利用 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ 及 $\cos 2A = 1 - 2\sin 2A$，求 sin 15° 的真確值；並且証明兩個求得的值相等。

在第 (1) 題 ΔABC 的面積 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin 15°$，使用近似值 $\sin 15° = 0.2588$ 足夠有餘，但是在第 (2) 題要証明兩個值 $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$ 相等，我們以真確值運算才能精準地証明兩者相等，不能只倚賴計數機的 0.258819045。

真確值及近似值在數學廣闊的園地各展所長；但如要提升至論證推理的層面，真確值是當然的選擇，因此運算根式真確值的方法是不可或缺的。

單項根式約至最簡的規格

要建立一套運算根式真確值的系統，首要的任務是訂定單項根式（single surd）的「最簡單規格」。Gilbert M. Peter（1996，453 頁）指出將根式化至最簡須符合三項條件，

原文如下：

Simplified Forms for Radicals

A radical expression is in simplest form if:

1. *the radicand contains no perfect squares if the radical is a square root, no perfect cubes if the radical is a cube root, and, in general, no perfect nth power if the radical is an nth root;*
2. *no fraction appears in the radicand; and*
3. *no radical appears in the denominator of an expression involving fractions.*

簡譯如下：

最簡根式須符合下列條件：

1. 平方根的被開方數不含完全平方數（因子），立方根的被開方數不含完全立方數（因子）；一般而言，n 次方根的被開方數不含完全 n 次方數（因子）；
2. 被開方數不含分數；
3. 分數式中的分母不含根式。

參考上述說法，再考慮「簡化 $\sqrt{整數}$ 」及「將 $\dfrac{整數}{\sqrt{整數}}$ 分母有理化」共通之處，可以提出：

一個根式（radical）徹底簡化及（或）分母有理化後，它是一個有理數 k，或是一個不盡根式（surd）$a\sqrt{b}$ ，其中 a 為非零有理數，而被開方數（radicand）b 是一個不含完全平方數因子的正整數。

同類根式

不盡根式化至最簡之後，被開方數（radicand）相同的便是同類根式（like surds）。

在課堂練習常見的例子：「簡化 $\sqrt{48}-\sqrt{12}+5\sqrt{27}$ 」——$\sqrt{48}$、$\sqrt{12}$ 和 $5\sqrt{27}$ 雖然已是真確值，但唯有將它們化至最簡的 $4\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$ 和 $15\sqrt{3}$ 方可合併至 $17\sqrt{3}$ 。

徹底簡化根式顯然是要將無理數的部份盡量縮小，使它們易於分類，方便和同類根式透過加減合併。

單項根式的分母有理化

根據上述的規格 $a\sqrt{b}$ ，要維持被開方數（radicand）b 是正整數，將分母化爲有理數便順理成章了。例如：$\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$（由此可知，它倆不是同類根式）。

另一方面，根式在分母有理化的過程中可以同時徹底簡化，例如：

$$\frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

再舉一例，$\sqrt{1.2} + \sqrt{1.8} = \sqrt{\frac{6}{5}} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{5}}$，$\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{5}}$ 只是將分子相加併寫，並不是最簡規格，$\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{1}{5}\sqrt{30}+\frac{3}{5}\sqrt{5}$ 才是。

分母是二項根式的有理化

處理這類根式的目的，是將之寫成二項根式並約至最簡，共軛根式（conjugate surds）能有效解決問題。例子很多：

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{15\sqrt{6}}{2\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{6}}{2\sqrt{7}+\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{42}-15\sqrt{18}}{25} = \frac{6}{5}\sqrt{42} - \frac{9}{5}\sqrt{2}$$

上述顯示，除了以分母有理化將根式從分母移走之外，應將兩個項都約至最簡，預備它們可以各自和同類根式加減。

結語

根據香港課程發展議會 1999 年編訂的中學數學科課程綱要，有關「根式」的其中兩個學習重點是：

- 對常見的根式進行運算，包括將含有 $\sqrt{a}$ 形式的分母有理化。
- 欣賞可以用較簡潔的方式表達根式。

「用較簡潔的方式表達根式」是「對根式進行運算」的關鍵手法。分母有理化和常規的簡化殊途同歸，都將根式寫成最簡規格 $a\sqrt{b}$（其中 a 爲非零有理數，而被開方數 b 是一個不含完全平方數因子的正整數）。

筆者希望學生們理解這些做法不只是形式或考測的需要，這樣做其實有很好的數學理由；例如，當我們對「黃金比例」這個課題進行探究，有必要對 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等的根式進行運算推演，便更清楚了解這些運算步驟的意

義了。

最後筆者以兩道題目作完結：

1. $\sqrt{8}$、$\sqrt{18}$ 和 $\sqrt{32}$ 是一等差數列的首三項，求它的公差及通項。

2. 簡化 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ － $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 。

參考資料

Borowski, E.J. & Borwein, J.M.（著）貓頭鷹編譯小組（譯）（1999）。《數學辭典》。台北：貓頭鷹出版社。

McGivney-Burelle, J. & White J. A. (eds.) (2007). May Calendar. *Mathematics Teacher, 100 (9) 616 – 617.*

Peter, G.M. & Welch, C. L. (1996). *Elementary algebra.* Minneapolis/St. Paul: West Pub.Co.

Skemp, Richard R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12 (2) 88 – 95.*

香港課程發展議會（1999）。《中學課程綱要：數學科課程綱要（中一至中五適用）》。香港：政府印務局。

作者電郵：estella.hui@gmail.com