

滬港兩地小學數學教師對退位減法的理解

盧錦玲

華東師範大學

引言

數學的教與學是一種文化的活動 (Stigler & Hiebert, 1999)。很多關於東西方不同地區的教學實踐的研究，目的都是嘗試找出東亞地區學生在數學上表現良好背後的原因 (Hiebert et. al., 2003)。研究顯示，美國和中國的數學教師對數學的教學與學習的信念存在文化上的差異。他們不僅在學生的學習目標看法不同，亦在數學概念的表達上有不同的價值觀 (Cai, 2003)，而中國教師的基礎數學知識比美國的較深入。中國教師對多種演算方法的理解，讓他們能從容地處理學生在學習上的一些非常規的方法 (Ma, 1999)。

上海和香港兩個城市有著不同的文化背景和歷史，一個是中國內地的大城市，而另一個則是一個融合了東方和西方文化的國際都會，但同樣位處儒家傳統文化氛圍下的東亞地區。兩地數學教師的數學知識，會否像美國和中國的比較研究發現般，存在明顯的差異？還是十分類近？筆者曾嘗試利用問卷，搜集滬港兩地教師有關教授退位減法這課題的資料，研究他們在基本數學概念的理解，從而嘗試找出他們在學科知識的一些強項和弱點。

問卷設計及一些發現

根據馬 (1999) 的研究，學生的退位減法的概念是通過三個層次的減法學習發展而成的，即 (一) 10 和 20 以內的加減；(二) 20 至 100 以內的加減；(三) 多位數的加減。這個研究選取了一個第二層次的退位減法例子：「 $23 - 7$ 」，一個被減數剛好大於 20，減數少於 10 的減法題目，讓教師討論集中在個位的運算上。

問卷分三部份：(一) 學生學習該道減法題目需要具備的先備知識；(二) 教師對於學生解決該道減法題目的策略的認識；(三) 教師教授該道

減法題目的教學表達及方法。

筆者分別向 23 位上海的和 24 位香港的小學數學教師發出問卷，全部收回。回應者當中，香港教師的小學數學教學經驗分佈範圍較上海的廣濶。除了兩位上海教師之外，其餘回應者都有對應退位減法課題的級別的數學教學經驗。

第一部份

教師自己本身擁有的數學知識，會限制他們教學策略的變化及幫助學生學習數學概念的能力。在一個有系統的數學「知識群組¹」內，程序性的課題和概念性的課題是相互交織的 (Ma, 1999)。在退位減法的知識群組裏，包含了很多與退位減法有關的知識組件，20 以內的加減是當中的關鍵組件。教師需要將課題中的關聯²明確地顯現出來，才能幫助學生的學習。然而，教師是有意識地還是無意識地在教學當中建立這些關連，這就在於教師對學科知識的認識了 (Ma, 1999)。「當他們被問及，在學習退位減法之前，你們覺得學生需要理解甚麼和有能力去做甚麼的時候，教師所表達的就是他們自己的知識群組，當中包括了兩種連繫 (Ma, 1999, p.21)。」

故此，爲了理解兩地教師的學科知識，問卷在第一部份安排了一個假設的情境：學生學習處理「 $23 - 7$ 」這道題之前，教師需要與學生重溫必要和重要的先備知識，但課時十分有限，教師要列舉不能多於 5 項需要重溫的先備知識。然後，筆者依據馬 (1999) 提出的知識組件，將回應者所列出的先備知識分類。

正確性和意義是評量教師所擁有的知識的本質的重要標準 (Ball, 1991)。所以，筆者在分析部份中亦選取一些有關先備知識和教學策略的質的數據，從它的正確性和意義兩方面分析，從而說明教師在掌握數學語言和術語的能力。

-
- 1 教授某一課題時，教師通常圍繞該課題而考慮到的相關課題。教師組織知識時的思考方式。它揭示教師對培育學生基礎數學知識的縱向過程的理解。一個完整的知識群組包括程序性課題、概念性課題和基本原則 (Ma, 1999)。
 - 2 馬 (1999) 提出了兩種關聯：相關的程序性課題之間的關聯、一個程序與它的說明之間的關聯。

知識群組

上海教師描述學生的先備知識的語句是相當統一、近似和精確的。相對來說，香港教師所用的詞彙和術語的變化很大的，有時候是點模糊，甚或不正確的情況（見表一），而教師的數學教學經驗似乎並不是關鍵的影響原因。

模糊	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 比 10 大的減法概念 (4) ➤ 數量大小的分別 (3) ➤ 一位減一位減法 (13)
不正確	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 十位數減個位數 (3) ➤ 單位數減單位數 (2)

表一：香港教師描述先備知識時的用詞；() 回應者的數學教學經驗

一些香港數學教師只是單純地描述程序（見表二）。雖然部份上海教師也是以程序為焦點，但描述的方向與香港的有點不同，例如：能熟練地掌握 20 以內減法。

一位有九年數學教學經驗的香港數學教師	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 知道甚麼是個位和十位 ➤ 知道甚麼是減法，例如：拿走 ➤ 知道怎樣利用加法來檢查答案 ➤ 知道當寫標準直式時，個位要對齊個位，十位要對齊十位
--------------------	---

表二：一個香港教師列出的先備知識

兩地教師平均列出的先備知識項目數量相近。上海數學教師所有列出的先備知識都在馬（1999）所提出的減法知識群組之內。而且，所有上海教師都寫出退位減法知識群組中的關鍵組件。相反，有 2 位香港回應者在整個先備知識的重溫項目中沒有提及任何有關「20 以內減法」或「10 以內減法」的內容。一些旁落於知識群組以外的項目，如：「數數」、「單數和雙數的概念」、「解決簡單應用的問題」和「檢查答案的程序」，都是由香港教師所提出的。儘管重溫的課時有限，上海教師傾向重溫與課題最直接有關

的先備知識，而香港教師則傾向由較基本的概念開始重溫。

在緊迫的教學過程中，教師能否充分利用課時，能否直接抓緊教學或重溫的重點，減少不必要的旁枝，教師是否對整個課題的知識群組有基本的認識，對課程的縱向關聯是否有一個整體的認識，能否在學生先備知識的基礎上建立新的概念，這些都會影響著學生學習的效果。

第二部份

作為專業的數學教師，教師本身的知識³是非常重要的（Shulman, 1986）。專業的教師要知道甚麼能讓學生學習來得容易點，包括要認識學生需要學習的概念、學生已有的概念和植根在學生知識架構內的錯誤概念。

故此，為了理解教師對學生的認識，在問卷的第二部分，回應者需要估計，當面對「23 - 7」這道題而教師未教授這課題之前，學生會有哪些解決方法處理問題。然後，筆者把教師的回應分為三個層次：（一）具體層次（例如利用數棒去倒數），（二）半具體層次（例如利用數線或畫圖），和（三）抽象層次（例如利用加法和重組數字）。

教師眼中學生的解題策略

香港和上海教師分別平均列出三和四個不同的解決方法。回收的問卷中，所有上海教師都必定列出了一些抽象層次的解決方法，而所有香港教師都必定列出一些具體層次的解決方法。在三個層次裏，少數上海教師能提出半具體層次的方法，而少數香港教師能列出抽象層次的解決方法。在抽象層次的解決方法中，5名上海教師估計學生會利用加法解決減法的問題，但並沒有香港教師估計學生會這個策略。

香港教師傾向列出具體層次的解決方法，這可能基於他們對學生的期望，又或是他們對學生能力的理解。然而，如何將學生的具體層次的思考逐步提升至抽象層次，如何協助學生將新的知識（減法）與在學生的舊有知識（加法）之聯繫起來，都是需要教師小心鋪墊的。不然的話，學生學習的概念便會出現互相割裂，學生的數學能力停滯不前的情況。

3 其中三類：學科知識、學科教學知識及課程知識（Shulman, 1986）。

第三部份

數學概念的教學表達⁴會影響學生的理解和教學的效果。所以，專業的教師要能選擇最有效的表達形式、最強而有力的比喻、例子和解說。他們對學生學習的了解，亦有助他們設計適當的教學策略和教學演繹方法，從而促進學習。

故此，爲了理解教師教學表達的組織，在問卷的第三部分，回應者會描述他們介紹退位減法的標準直式的教學方法。由於僅僅基於回應者在問卷上的書面回答而將教師的教學法分類爲程序主導和概念主導是不合適的。故此，筆者只依據回應者對他們教授算式時的教學方法的描述，分爲兩組：(一) 解釋演算步驟，(二) 以言語表述步驟。

教學策略

與馬(1999)的研究結果類似，大部份上海教師傾向解釋「 $23 - 7$ 」的運算步驟，大部份香港教師，與美國的相似，傾向運用語言描述運算程序。香港教師的教學方法各有不同，相對地，上海教師的教學方法都很類近，變化不多。香港教師所用的數學語言和用語不準確和不正確的相對上海的教師多，例如「個位三增加至十三」，或將標準直式上分隔答案與算式的橫線稱爲「數線」。程序性知識的學習而沒有意義的理解會淪爲資料的記憶，錯誤或模糊的數學語言更會增加學習的混亂及概念混淆的機會。協助學生理解標準直式的運算程序的具體意義，讓學生理解數學不是一門死記硬背的學科，或可減少學生對數學的恐懼。

總結

「對數學的淵博知識，應該有其廣度、深度和透徹度 (Ma, 1999, p.124)。」上海的回應者比香港的較能掌握基礎數學概念的結構和數學語言。香港的回應者在基本數學概念的認識、概念間的連繫和縱向的連貫性較弱。假若能提升教師對基本數學概念的結構的理解和掌握數學語言的能力，或會有利於學生的數學學習。

4 教學表達指教師和學生在課堂上用的表達方法，是表達知識的載體和思想的工具，用來解釋一個概念、一個關係、一個關連或一個解決問題的過程 (Cai, 2003)。

香港回應者較上海教師在教學策略上和教學表達上有較大的變化和彈性。上海回應者著重數學概念的抽象性，香港回應者則較著重具體的和視覺的表達。假若能有效組織教學，香港回應者應比上海的較能處理不同學生的需要。值得注意的是，數學的抽象性與部份學生學習數學的興趣之間如何取得平衡是教師需要思考的問題。

由於研究對象不多，本研究結論顯然不能概括為滬港兩地數學教師的差異。由於研究數據中，教師的書面回應不能完全地和真實地反映課堂上的數學學習和教學，故此，課堂內的實況及兩地在數學的語言和教學表達上的差異都是值得進一步深入探討的課題。

參考文獻

- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In Brophy, J. (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 2, pp.1 – 48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Cai, J. (2003). *US and Chinese Teachers' Constructing, Knowing, and Evaluating Representations to Teach Mathematics*. Presented at the annual meeting of the American Educational Research Association; Chicago, IL: April 21 – 25, 2003.
- Hiebert J., Gallimore, R., Garnier, H. & Giwin, K.B. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries - Results from the TIMSS 1999 Video Study*. National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.
- Ma, Liping. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics- Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. London, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching, *Educational Researcher*, 15, pp.4 – 14.
- Stigler, James W. & Hiebert, James (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: The Free Press.

作者電郵: pollylao@hotmail.com