

# 香港課程改革、《(非官訂) 香港數學課程》 與「數學化教學」

馮振業

香港教育學院數社科技學系

## 引言

最近應邀為國內的一個中小學校長培訓課程，主講香港數學科的課程改革，勾起一連串已放下多時的舊思緒。腦海中出現了一些圖畫，一邊是厚厚的課程改革文件，另一邊是薄得不可能再薄的《(非官訂) 香港數學課程》(原稿以英文撰寫，標題作 *(Unofficial) Mathematics curriculum for Hong Kong: P.1 to S.5*，下簡稱《非官訂》)。前者由政府出版，印刷精美；後者是黃毅英與筆者的思考筆記，粗糙簡陋。然而，兩者都同時指出數學課程改革的方向，不過無論立足點或是追求的學習品質，均大大不同。為了慶祝《非官訂》面世十週年（只是個人執著而已，未知黃毅英有否相同的情緒反應），本文嘗試把課程改革刻劃出來的數學，與筆者放進《非官訂》的構想，及其後推行的「數學化教學」作個對比，希望能有溫故知新的效果。

## 課程改革改了甚麼？

課程改革的覆蓋很廣，改了的東西很多，但與數學相關的，筆者看到一項。這一項很突出，不容易走漏眼：數學的特質被淡化了，變得模糊！這話也許令很多人感到不安，故亟需羅列佐證，以示並非無的放矢。

課程改革重視九種共通能力：協作能力、溝通能力、創造力、批判性思考能力、運用資訊科技能力、運算能力、解決問題能力、自我管理、研習能力（香港課程發展議會，2002a）。姑勿論這些能力如何可以準確界定，提出應該重視，倒也沒有人會反對。問題是，不同學科可能會對不同能力的發展有所偏重，要每個科目都涵蓋全數九種能力，恐怕並不容易，實在亦無必要。數學科非常「幸運」，全數「中獎」。筆者找到下列九個例子，是課程指引列出這九種共通能力在數學科的詮釋（香港課程發展議會，2002b，15 – 23 頁）

共通能力	在數學教育中的教學示例
協作能力	明白及接納具不同文化背景的組員對同一數學問題可能會有不同的詮釋（例如分析統計數據）
溝通能力	有邏輯地表達問題的解法（例如適當地運用「=」符號）
創造力	運用想像力把三維空間的圖形形象化
批判性思考能力	以符號表達由歸納具體經驗得來的結果（例如從觀察幾個例子歸納出指數定律）
運用資訊科技能力	判斷是否恰當使用資訊科技解答數學問題（例如是否以心算計算 $2 \sin 30^\circ$ 會較快）
運算能力	認識八個方位，例如東北、西南等
解決問題能力	提出數學問題的解法時，能準確判斷和闡釋自己或他人的論點（例如解釋在找出市場上哪種尺寸的鞋最多人穿時，為甚麼採用「眾數」是較可取的計算方法）
自我管理能力	應具自信並能獨立地應用數學知識去解決問題
研習能力	用數學語言，包括符號（例如簡單代數方程）及圖像（例如棒形圖）來表達問題

在講座上，筆者讓內地約一百位中小學校長把上表右方的示例與左方的九種共通能力配對，結果絕大部分都未能達到超過 50% 的命中率。誠然，這結果不能說明甚麼，校長們並非數學教師，一般不會熟知學科的技術知識。然而，這些依據官方課程文件的標準答案，卻很可能會叫專科數學教師大吃一驚。

困惑和爭議，可以來自右方描述本身，也可以源於左右配對的合理性。例如，單看上面協作能力的示例，便會令人質疑：要培養協作能力，就得接納「對同一數學問題可能會有不同的詮釋」嗎？數學教師不是要教學生認真理解數學問題嗎？大家都知道正確理解問題的重要性，卻不曾聽過要接納對同一數學問題可有不同的詮釋。果真如此，豈非各有各理解，各有各做，各有各答對？括號內的「例如分析統計數據」，好像暗示例子所指的

是統計分析。即使是關乎統計學，也不應對問題有不同的詮釋，極其量是解答方法不同而已。退一步說，統計學問題和數學問題是有本質上的差別的。前者時有不同的答案，例如，應以入息平均數，還是入息中位數反映一個地區的一般收入水平？這是統計學問題，並無唯一正確的答案。後者通常非對即錯，不會出現不同的，但同時是正確的答案。例如，一個地區的所有在職人士，收入增加同一款額，這地區的入息平均數和入息中位數起了怎樣的變化？雖然問的內容關乎統計量，但其本質是數學問題，正確答案只有一個。雖然某些統計學知識是數學課程的一部分，但是統計學問題和數學問題，還是應該適當地區分。

再看配對的合理性。姑且假設「運用想像力把三維空間的圖形形象化」之中的「形象化」，是指「以畫在紙張上的圖形表示」，試問大家會把這種能力看成是創造力嗎？即使我們不關心「東北」、「西南」應叫做「方向」還是「方位」，我們會把「認識八個方位，例如東北、西南等」，看成是運算能力嗎？

課程改革又提出了四個關鍵項目：德育及公民教育、從閱讀中學習、專題研習、運用資訊科技進行互動學習（香港課程發展議會，2002a）。以下集中討論一個課程文件提供的專題研習示例，看看可以怎樣進行。

在第三學習階段，即中一至中三，有一個關於正方體的摺紙圖樣的，以小組形式進行的專題研習示例（香港課程發展議會，2002b，104 – 107 頁），當中要求學生

- (i) 構作不同的正方體摺紙圖樣
- (ii) 在一 A4 紙張上構作最大體積正方體的摺紙圖樣（104 頁）

又提到兩項預備知識：

- (i) 理解正方形及其特性
- (ii) 正方體的體積（104 頁）

文件建議的實踐方式，是讓學生「經過反覆的試驗，找出不同的正方體摺紙圖樣（104 頁）」。要用上的物料，包括「A4 紙張、剪刀、量角器、

膠紙、圓規、直尺及計算機 (104 頁)」。換言之，是不期望學生使用系統的方法，只採用試誤策略，自然也不能保證找到全數 11 個摺紙圖樣。至於第二項工作，就沒有甚麼執行方法的描述了。

再看評分準則。在「策略和方法的運用」一項，要求檢視「學生是否懂得利用合適的工具及方法以構作立體的摺紙圖樣 (105 頁)」和「學生是否選用了可行的策略以構作最大體積的立方體 (105 頁)」；在「準確性」一項，要求檢視「所構作的正方體及其摺紙圖樣是否準確 (105 頁)」和「所構作的製成品是否真的是最大體積的正方體 (105 頁)」。

由於文件並未細述其中的數學原理，也沒有勾勒學生完成習作的具體方法，衍生兩大疑問。第一，習作希望學生憑空想出正方體的摺紙圖樣，還是可以自由借助諸如塑膠拼板之類的輔助器具？前者要求一定的空間想像力，後者卻是小學生可以完成的形式（可參看馮、葉，2004）。有見及小學課程指引（香港課程發展議會，2000）已有「製作正方體及長方體的摺紙圖樣 (41 頁)」一項，合理的推論應是前者，亦與中學課程綱要的「探討及判斷一立體的摺紙圖樣（香港課程發展議會，1999，23 頁）」一項較為吻合。然而，從「學生是否懂得利用合適的工具及方法以構作立體的摺紙圖樣」一項評分準則，也不能排拒學生利用塑膠拼板或模型之類作為「合適的工具」。

第二，習作的評分既然著重考慮學生是否選用了可行的策略以構作最大體積的正方體，自然無法迴避說明所製作的摺紙圖樣，確實可造出最大體積的正方體的立論。然而，在不清楚是否已找到全部摺紙圖樣的情況下，學生將如何立論？如果學生造出圖一的一款，大家將如何確定它是否造出最大體積的正方體？事實上，如果考慮斜放的可能，圖二可以造出比圖一更大體積的正方體，這可以從比較正方形邊長 ( $CD > AB$ ) 得知。儘管如此，也不容易得知最大體積的正方體可以用哪款展開圖，以何種放置方式造出。唯一可以肯定的，就是在未找出全數 11 款摺紙圖樣，或只具備上述兩項大概只有小學程度的預備知識，壓根兒無法有效地立論。如果要避開這種困難，只要把習作布置成競賽，看哪一組造出的正方體體積最大即可。這種設題方法，保留了讓學生運用幾何直觀尋找最優解的元素，卻不用正面討論最大體積的正方體如何造出。

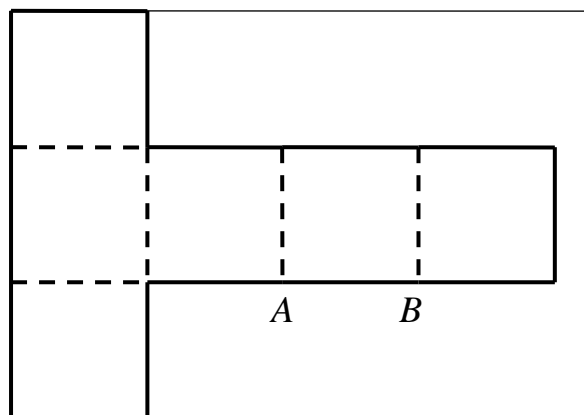


圖 一

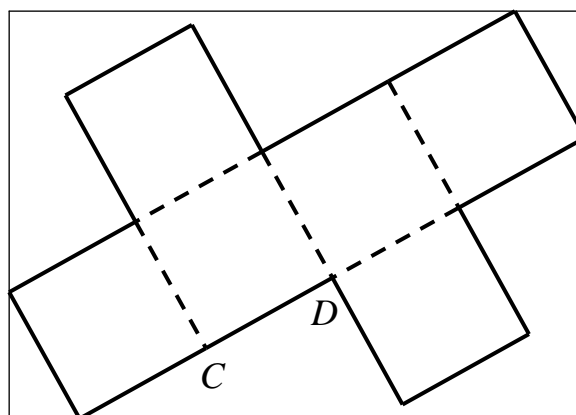


圖 二

除了課程指引，課程綱要也存在令人憂慮的特徵。(I) 避開準確描述或用詞：例如在小六立體圖形課題內，有「認識立體圖形中的頂、稜和面（香港課程發展議會，2000，44 頁）」一項。它指的是（凸）多面體，卻迴避了準確的用詞，令教師為找尋圓錐和圓柱的頂、稜和面而苦惱；又例如在第三學習階段有「欣賞使用最少工具繪畫線和角（香港課程發展議會，1999，22 頁）」一項，有點令人摸不著頭腦。對學生而言，畫直線用直尺，畫圓用圓規，只一件工具，還可以再少嗎？其他曲線通常不用甚麼工具，只手描而已，更是少無可少。蛇尺、雲尺之類屬較專門的繪圖工具，一般不會用上。因此，「使用最少工具繪畫線和角」的確切意義，實有準確描述的必要，可惜課程綱要欠奉。(II) 忽視學理鋪陳的完整性和連貫性：例如在小四提出要教授整數乘法交換和結合性質（香港課程發展議會，2000，35 頁），卻沒提及作為多位數乘法的基石的乘法分配性質；又例如在第三學習階段的直觀幾何部分，提到「探究如何以圓規及直尺繪畫角平分線、垂直平分線和特殊角，並列舉理由支持有關繪畫步驟（香港課程發展議會，1999，22 頁）」。既然是直觀，又為何要求列舉理由？要探究，就是要摸索，試圖找出繪畫的方法。這樣做有別於由教師直接講授，學生要看著線段  $PQ$  的垂直平分線  $L$ ，然後發現  $L$  上的點，正好就是平面上與  $P$  和  $Q$  等距的所有點，才可想出垂直平分線  $L$  的作圖法：分別以  $P$ 、 $Q$  為圓心，較  $PQ$  一半為長的半徑作圓，然後畫一直線通過兩圓的兩個交點（見圖三）。這樣的過程會令學生發現「線段的垂直平分線，乃是於線段所在的平面上，與線段兩端點等距的移動點的軌跡」的事實。換言之，軌跡的討論將成為探究活

動的中途站。依現時的課程，軌跡的質化處理，要到第四學習階段的直觀幾何部分才會出現，其中有關的只有「口頭描述或繪畫根據某些條件下移動點所經的軌跡（香港課程發展議會，1999，33 頁）」一項。單看課程綱要，並不容易掌握有關軌跡教學的縱向布局。(III)不重視讓學生學會思考，理解數學：例如在小五分數除法課題下，只要求學生「1. 進行分數除法的計算，每題不超過兩步運算。2. 解答簡易應用題，但不包括求原數。3. 估計計算結果。（香港課程發展議會，2000，41 頁）」這與 1983 年課程期望「通過分割圖形介紹分數除法，… 盡可能讓學生根據分割圖形之結果，找出分數除法之計算方法（香港課程發展委員會，1983，49 頁）」相比，明顯較重視機械化計算，淡化了數學的理解和思考成份。

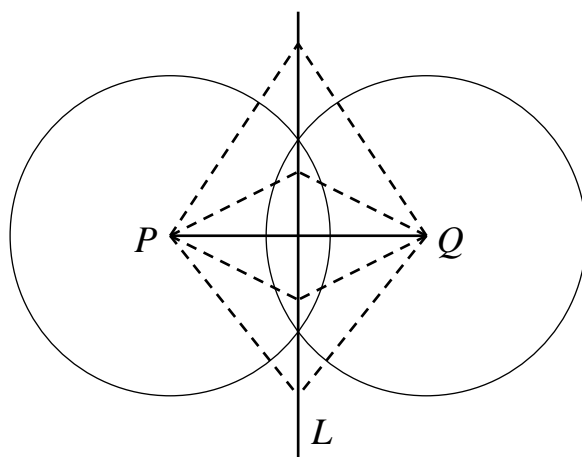


圖 三

上面的分析，也許帶點筆者對數學的一些偏執，不同意的讀者，大可也來辯論一番。花了大量的篇幅，不是要推銷筆者的看法，而是要說明，目前的課程改革，缺少了對數學學理，以至有關教學細節的關注和討論。於是，數學的特質被淡化了，因為課程改革把大家的注意力，都扯到九種共通能力和四個關鍵項目上。當本應用來討論數學及其教學的時間、空間和精力都給擠掉，課程內的數學，就變得模糊。有人或許會說，一般教師都不看課程文件，寫得是好是壞，根本起不了太大的影響。果真如是，那麼這些文件大可不寫，把資源和時間都放到更有價值的事情上。

## 《非官訂》的誕生及其後的發展

筆者認為，中小學數學課程的編寫，應可更有連貫性，數學思想和脈絡，應可更清晰。於 1997 年 7 月，與黃毅英合作，把這些想法記諸文字，用了約三天時間寫成《非官訂》(Fung & Wong, 1997)。這份文件只有不到五十頁，其中一項重要觀念，就是荷蘭數學教育泰斗 Freudenthal 提出的「數學化」(Freudenthal, 1973, 1991)。筆者深信，只要按數學化觀點組織課程和教學，學生應可學得更好。《非官訂》的誕生，就是一項以數學化觀點組織課程的工作。及後於 1998 年，筆者得優質教育基金贊助，開展了「數學化教學」計畫(詳見馮, 1999, 2004)，是為一項以數學化觀點組織教學的工作，可算是《非官訂》的延續。

數學化教學已在香港出現了九年，近年對它產生興趣的小學教師日漸增加，主要是因為它帶來良好的教與學的效果，也印證了筆者早年的想法。以其中一個有關正方體摺紙圖樣(下稱展開圖)的設計為例，教師帶領高小學生尋找全數 11 款展開圖樣。經不同教師反覆試驗，效果令人雀躍。不單令大部學生能準確辨認正方體展開圖，更令學生的空間想像力得到開發，甚至能進行有關的演繹推論(詳見馮、葉, 2004)。這設計用上正方形塑膠拼板，讓學生動手操作。經近年於不同的數學化教學講座上介紹，發現這類塑膠拼板教具銷量大增。依代理商所言，購買的學校多了，據聞連香港特區政府，也是大客戶之一。

## 結語

與課程改革浪潮相比，數學化教學立足於數學本身，而非一些跨學科的概念。它處理的是與數學教學有關的深層問題，而非只著眼形式或一些表面功夫。在筆者沒有積極促銷，實踐的教師沒有得到任何額外資源或利益的情況下，數學化教學能逐步推廣，甚至登陸內地，是因為它正視數學作為一個深厚的學問領域的獨特性，並且小心處理教學的每個細節。十年前，筆者以《非官訂》回應自己對數學課程發展的擔憂。今天，筆者及一群推行數學化教學的小學教師，以過去九年的工作(部分見於吳, 2007; 梁、黎、潘、梁, 2007)，抗衡目前淡化數學特質，使數學變得模糊的教學發展趨勢。誠然，以極少數人的力量，抵抗由政府以龐大資源觸發的浪潮，無異螳臂當車。

## 參考資料

- 吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》。香港：香港數學教育學會。
- 香港課程發展委員會 (1983)。《小學課程綱要：數學科》。香港：教育署。
- 香港課程發展議會 (1999)。《數學課程綱要 (中一至中五)》。香港：教育署。
- 香港課程發展議會 (2000)。《數學課程指引 (小一至小六)》。香港：教育署。
- 香港課程發展議會 (2002a)。《基礎教育課程指引：各盡所能，發揮所長(小一至中三)》。香港：教育署。
- 香港課程發展議會 (2002b)。《數學教育：學習領域課程指引 (小一至中三)》。香港：教育署。
- 梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信 (編) (2007)。《香港數學教育會議 2007 論文集》。香港：香港數學教育學會。
- 馮振業 (1999)。〈數學化教學：從夢想到現實〉。載於黃毅英、黃家鳴 (編)。《基礎數學教育的優化研討會論文集》，4 - 46 頁。香港：香港中文大學教育學院課程與教學學系。
- 馮振業 (2004, 6 月)。〈數學化教學：理論、實踐與前瞻〉，收入 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)《香港數學教育會議—2004 論文集》，78 - 88 頁，香港大學教育學院。
- 馮振業、葉嘉慧 (2004, 6 月)。〈數學化教學：空間觀念的培養〉，收入 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)《香港數學教育會議 - 2004 論文集》，89 - 96 頁，香港大學教育學院。
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. (陳昌平、唐瑞芬等譯 (1995)。《作為教育任務的數學》。上海：上海教育出版社。)
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (劉意竹、楊剛等譯 (1999)。《數學教育再探》。上海：上海教育出版社。)
- Fung, C. I., & Wong, N. Y. (1997). *(Unofficial) Mathematics Curriculum for Hong Kong: P.1 to S.5*. Hong Kong: Hong Kong Association for Mathematics Education.

作者電郵：cifung@ied.edu.hk