

從數學家角度看高中數學課程*

區國強

香港中文大學數學系

前言

最初，大會請我討論新高中數學課程，我很快就答應了，因為我實在對課程有些意見。後來我想深一層，發現我的意見不是單單對應「新」的課程，於是就把「新」字從題目中除掉了。但是，我也明白在座很多朋友的心中始終忘不了那新課程（尤其黃毅英），所以總不能辜負各位的期望。此外，我也在數學角度中加了個「家」字，強化個人意見的色彩。數學家的角度不一定是全面的，只是一個沒有接納數學家觀點的課程，也一定有嚴重問題。

舉凡討論新課程，批評比建議來得容易，下面我也不例外，所以一定要先「申報利益」。我是數學課程發展科目委員會的成員之一，有份參與訂立新的數學課程，這個課程的缺失，我亦要承擔責任。另外，年多以來，許多委員花了很多個晚上去反覆探討研究可行的課程內容，他們的心血遠比我付出的多。我不希望給大家一個錯覺，以為我要在這裡責難他們。事實上，在大環境的侷限下，他們無論如何努力，都只能在一些內容支末上改動，把課題從這裡移到那裡，在課程的邊緣搬進搬出。這群關心數學教育的朋友，其實沒有得到社會充分的支持，去好好發展一個數學課程。

理念、目標與方向

任何課程版本，開頭總有一些理念與目標的陳述，這些章節大都是大家耳熟能詳的東西，不需要過分斟酌。可是，這個新的高中數學課程，在這個特定的時間產生，除了甚麼邏輯、創意、批判、優美等以外，還有甚麼特別的視野呢？新課程在這方面沒有交代，而且，從內容和課題的安排可見，新課程確實欠缺獨特的時空觀點。

* 編者按：2006年11月24日，香港中文大學課程與教學學系舉辦「數學專科專教？—數學與教學知識的匯通」研討會，並邀請了區國強教授為該研討會的講者之一。本文為區教授當天的發言稿。

新課程除了要迎接 3-3-4 學制的特殊意義外，我個人覺得跟回歸也是分不開的。香港與中國的融合，令香港在經濟、科研和文化都產生了蛻變。高中數學課程與這三方面都有關，方向應該有遠見和前瞻，前線的老師才能順應地於日常教學中貢獻。香港早已受著全球化的衝擊，回歸以後，這種壓力更來自貼近的地區，我們的社會需要高水平數學能力的人才，方能面對這個新挑戰。我們的數學課程，打算要培養怎樣的人才呢？當語文教育不斷提升來迎接新環境時，數學是否因一些學生力有不逮而不敢提高要求呢？因此，除了放諸四海皆準的目標外，新課程其實可以更直率的點出香港必須走的路。

例如課程建議書對中學畢業生前路的描述，就典型地劃分學生為打算升學、職訓、就業三個方向。誰都知道在家長、學生或教師心目中，升學才算是真正的前途。設計高中數學課程時，實在不必執著就業的準備。雖然細心一看，就知道內容並不完全遵照這個三分的平衡。可是，這個定位仍處處拖著課程的後腳。可見這個所謂平衡的枷鎖，不單是言文的問題，而實在令課程不能邁步向前。其實，在目前香港的社會情況下，課程目標大可不避諱的重升學而輕就業；舉進深而抑平凡。

課程的設計也強調另一個平衡，就是理論與應用的重點。究竟「應用」對大家的意思是甚麼呢？相信銀行家和數學家一定有很不同的想法。建議書中也沒有詳細的解釋，我們只能從“solve problems in daily life”或“real-life situations”等字眼來猜測它的意思。無論怎樣去理解，「理論實踐並重」並非神聖不可侵犯的定律。任何曾受相當教育的人都知道，日常生活所需的數學，大部分在小學範圍內，絕少超出初中程度。越高層次和越深遠的應用，就要更抽象的數學理論。過分強調實踐，只會使我們停步不前。我們談的是高中課程，不是小學或初中或大學課程，對應香港的環境，我覺得「為學生培養紮實的數學理論根基，輔以適量的應用練習，讓他們在將來的學科或事業上，能掌握較深入的數理分析，建立更深遠的應用」的定位，更為實際和適切。

當然，上述兩個目標並不是唯一的，尤其考慮到部分學生對數學的興趣不大或能力有限，不能接受太艱深的數學訓練。為了這類學生，課程也要有另一些目標。但要注意一個事實，許多這些學生都不是將來進入職訓或就業的同學，他們只是升讀了文科等數理要求不高的學科。對他們來說，

那些看似與生活有關的數學，也不見得很有趣；他們也不會擅長於處理所謂就業所需的數學方法。因此，課程裏的實用數學方法，根本不能提升他們的學習興趣，也不會給他們充實的培養。（這樣把學生學習數學的成效等同他們出路類別的錯誤，也令課程其他部分出毛病，下面再談。）新高中數學課程分為必修和延伸兩部分，這是數學科獨有的安排，是數學界努力的良好結果。因此，課程更應利用這空間去發揮兩極不同的效用。這兩條大相逕庭的路實在可以大膽直接的說明，不用藏頭畏尾，好讓課程更能兩全其美。

課程結構

在整個 3-3-4 課程的規劃架構下，數學科能發展出一個必修與延伸部分的模式，是十分聰明的安排。這個安排容許數學科既可廣博又可進深，解決了普羅大眾所需要的基本訓練和思想修養，又保持社會在高等學問的競爭力。上面雖然提到兩部分的目標未夠明確，但從內容來看，兩部分也實在努力地為社會提供兩種截然不同的數學訓練。此外，我覺得兩部分的時間比也拿捏得很好。這也許是各主要科目中最有效的設計。（後記，黃顯華告訴我中文課程也很靈活，但中文課程架構似乎長於多元，數學的精於共賞。）

課程在延伸部分的「子結構」則極有商榷的必要。延伸部分劃分為 Module 1 與 Module 2 兩個單元，學生只可二者選其一。兩個單元分別名為“Calculus and Statistics”及“Algebra and Calculus”。由於是不能兩全的選擇，這個設計令人感到 Calculus 是不可不學的，有些人只需要 Statistics 而不用 Algebra；相反，有些人則只需要 Algebra 而不用 Statistics。各位曾接受一定數學訓練的朋友，你認為這個理念對嗎？這樣的安排，能為學生升學打好根基嗎？答案不問可知！只因這一點，我已經被不少關心香港教育的數學家責難過多次。

為何會出現這樣明顯的失誤呢？這又回到理念上了。我的感覺是積重難返。「重」包括兩方面，一方面是整個課程設計就好像一個複雜的機器，無論課程大框架與緊密的過程，都不是科目委員可以逆轉的。科目委員會只能在機器的帶動下，匆忙的運作（更不用說他們本身還有自己全職的工作），因而難於修正錯誤。「重」的另一面，是原有數學課程存在缺點，有些盲點一直不知不覺地潛藏在人心中。委員會一來需要敏銳的觸覺才能擺

脫舊有的困厄，二來需要很大的動力和時間來找到新的共識，以致帶來改進。可是，所要的心力和時間是機器沒有給予的。

我這裏不打算詳談課程設計機器的問題，寧願集中討論課程的學理。多年來，數學教育界有一個不成文的想法，就是最難的數學是讓數學、物理、工程的學生唸的；稍容易的是讓商科或少數社會科學的學生唸的；最皮毛的就留給文科生罷！如果在三十年前的學制背景下，這種想法確有一點原因和支持。時移勢易，想不到現在它仍然主導著新課程的設計。課程把延伸部分看成為升讀「自然科學、電算、技術與工程」等類的預備，兩個單元的分別在於一個重方法；一個重理論。至於升讀社會科學或商科的學生，或文、史、哲的，就好像只需要必修部分，與將來晉身職訓或就業的分別不大。再加上錯誤地以為實用的需要，主要是統計及一些微積分的方法，就把它們合成了 **Module 1** 的潛藏中心，因而忽略了整全的數學訓練。理論味道重一點的內容，就放到 **Module 2** 裏，在教學時間等限制下，併湊起來剛好 **Calculus** 和 **Algebra** 的東西較多，這個單元的主題因而誕生了。在出路主導和簡化思維的帶動下，催生了兩個妄顧學理的教學單元。

可是，香港實際上的情況時怎樣的呢？在大範圍經濟和廣域科技的要求下，香港的大學都興起精算、計量財務或金融、風險管理、財經工程等學科，這些科目都有一定的數學要求，目前取錄的對象是修讀 **AL Pure Mathematics** 的學生。事實上，經濟、心理、地球資源等社會學科，甚至一些對數學要求不高的學科，也招收不少理科生。相反的，某些「不那麼吃香」的大學的工程系，卻錄取沒有唸 **AL Mathematics** 的中學生。可見學生修讀較高深的數學，無論基於興趣或需要的考慮，均非單單指向數、理、工程等科目。與此同時，「具備高中數學訓練的學生」已出現供不應求的情形。要回應這種現象，數學課程的定位和內容，必須拋棄假想他人出路的桎梏，以學理為重，讓能者、愛者讀之。政策的計劃者常常以為自己可以預見未來，依據自己眼中的 **outcome** 來設計。這種做法，無論在經濟上或教育上，都嚴重失敗過。可是，它總是屢敗屢戰，換個樣式又再來。前線的教師，勞勞碌碌，被這些政策驅動而浪費精力。

我認為比較理想的高中課程結構，該是疊瓦式的，讓較廣的一層承拖著更高的一層。學生只要有能力和興趣，就可踏上更高的階段。有些人在中學已經爬得高一點，其他的也可以遲些學會後追上去。卻不該為學生分

派了出路，當他們將來的路和我們預期的不一樣時，他們沒有足夠的基礎去發展。課程也像均衡的養份，吸收快的人比較強壯；吸收慢的雖然稍瘦小，也能生存。課程裏不應設置不必要的分支，弄出幾類人物，卻這個沒左手；那個沒右手。

均衡的內容

既然課程設計應以學理為重心，課程的討論也應以內容為主。可惜，時間上不容許我在這裡說太多。事實上，仔細的內容也要各個崗位的人才的貢獻，不能單靠數學家（尤其只是其中一個）說了就算，這裡我將會就重要的準則說說我的看法。

首先，要保持香港在週邊城市間的競爭力，我們的數學課程一定要能培訓出優秀的數理人才。因此，數學課程的頂點要夠高，讓最有能力的學生可學習得深入一點。目前的高中課程，在考試主導之下，頂點訂得太低了，致使不少優良的學生錯過學習的機會。更可惜的，長期面對應付裕如的課程，令一些學生忽視了努力的重要。我所指的不是最資優的學生，而是約佔高中學生 30 % 的一大群，這些學生都有能力去學習難一點的數學。試想多年前只有很少人升讀中學的日子（例如蕭教授唸中學時），所有學生還不是學挺難的數學嗎？難道今天前頭 30 % 的學生的能力比不上當日的學生嗎？無論過去或將來，數學課程都被老師和學生看成學習的上限，沒有寫下的課題就不能考，因此也不用學。在這種文化下，香港數學課程的內容頂點必須大幅提高，預期 30 % 的學生有機會學過 **Module 1** 及 **Module 2** 的內容。

頂點的提高並不等於整個課程都要弄得艱深，這正是上述疊瓦式的重要之處，也是均衡內容要照顧的地方。下面談到幾個主要課題時，大家就會了解我的意思。

我對必修部分的內容沒有多大意見，畢竟我沒有花上足夠的時間在這部分。可能因為它的目標還不夠「灑脫」，仍然附帶著為職訓或就業服務的心態，內容仍然稍多強調數學技巧的訓練。這種內容其實不適合興趣傾向文、史、哲的學生，對他們來說仍然是難以應付的挑戰。當然，要有一個適切的內容，也許需要較長的時間去發展，單單老師所需的培訓與適應就可能要花上幾年。只要熱心數學教育的人士，意識到這個需要，朝著它發

展就可以了。

高中數學的課題籠統地可分以下四類：

1. **Analysis**

它主要探討數量之間的關係、變量等，並歸結於微積分。初中的數學比較靜態，少遇上這課題，在高中佔的比重較大。

2. **Algebra**

它包括符號運算和推演，解各種方程，其中牽涉矩陣等概念。

3. **Geometry**

它以平面幾何為綱，延拓到立體幾何與三角學。

4. **Data and Models**

處理數據以統計為主，也包含數或圖形的規律。現在的課程很少 modeling 的訓練，也許可以多利用文字題來幫助。

受過數學訓練的人都一定知道上面的分類是人為的，每個課題都與另外三個有密切聯繫和邏輯因果。它們就像潛水艇的浮箱，注水時一定要均等，否則頭重尾輕。四個課題本來有自然相通的地方，課程設計要注意保持這種連通，課程就自然有均衡的內容。這個均衡應該在必修部分和延伸部分都小心處理，學生就會得到合適的培育，大致達到整全的數學訓練。當然，有些學生的水平高一點，但無論高低，還可維持「水平」。

新高中課程的延伸部分卻明顯違反這均衡，無論 **Module 1** 或 **Module 2** 兩個單元都欠缺幾何，學生有足夠能力去了解微積分的函數變化或方程有沒有解的情況嗎？統計本是四分之一的主角，在 **Module 1** 佔了近乎一半；卻在 **Module 2** 不見蹤影！微積分雖然重要，但在六年的課程裏，是否可以更重視直觀呢？如果應用是那麼重要的話，是否要引進 modeling，而不是甚麼 real-life situations。

要認真地談課程的內容，實在需要更多時間和空間，也要更長的篇幅。（後記，雖然編者引誘我將來再寫，我可不會那麼不自量力。）課程發展並不是一個人或一撮人的功夫可就的，要整體的努力。策劃者以大原則為綱，留下空間讓老師去嘗試，好的課題自然會被吸納而模造出理想的內容。

讓我總結一下較為重要的原則來結束吧：

- 該以學問主導，不應強加 **outcome** 來考慮課程內容
- 高中數學課程不妨以理論為中心，輔以應用練習
- 內容的最高點和最廣面可拉開，讓能者學多點、學快點；並可容納不同興趣的學生
- 應重整結構，減少分支，切忌把學科分割派給學生
- 主要內容必須均衡發展，務使學生融會貫通，達致「水平」

謝謝大家！

作者電郵：thomasau@cuhk.edu.hk