

初中學生的數學理解障礙探究

王愛珍

廣東教育學院數學系

筆者在教學實踐與研究中發現，當教師直接提問學生一些概念、命題時，不少學生都能夠給予流利的回答，但他們往往不會正確運用所學的知識解決有關的數學問題。究其原因，發現大多數學生是因為對數學基本概念、定理、法則等的本質內涵根本沒有理解或者理解有誤。那麼，是什麼原因造成的呢？學生在理解方面存在哪些障礙？有無相應的教學對策？本文擬對這幾個問題作初步探討。

1. 數學理解障礙的涵義

學生在學習數學過程中，時常不能把握數學知識、思想方法等的本質及其所蘊涵的內在聯繫，也就是不能很好地理解數學知識，因此我們稱之為產生了理解障礙，簡單地說，數學理解障礙就是指學習者在理解數學知識時，遇到了困難。但就整個理解過程來說，是指學習者在現有的認知水平範圍內，通過數學學習活動，試圖以自身已有的知識和經驗等對數學知識資訊、思想方法等進行思維加工，但尚未能正確地重新加以解釋、建構其意義，從而不能把新的學習內容正確地納入已有的認知結構，在認知過程中出現斷層的一種狀態^[1]。

筆者根據自己的教學實踐，從數學認知、教育心理學的幾個層面，探討數學理解障礙的某些類型及其成因、教學對策。

2. 數學學習中理解障礙的幾種類型及其成因分析

2.1 認知結構缺損型障礙（簡稱認知型障礙）

所謂認知結構，是指個人將自己所認識的有關資訊組織起來的心理系統。它包括學習者頭腦裏的知識結構（指從教科書以及課堂教學的知識結構轉化而來的），思想方法、經驗等。而數學認知結構就是學習者對頭腦裏的數學知識、數學思想方法、數學觀及有關數學知識的背景等按照自己理解的深度、廣度，結合自己的感知覺、記憶、思維、聯想等認知特點，組合成的一個具有內部規律的整體結構^[2]。它是數學知識結構等與學習者個體心理結構相互作用的產物。一般而言，當人們不處於學習狀態時，其認知結構處於相對靜止狀態；當學習新知識時，必須首先啟動原有認知結構，

才能使新舊知識發生聯繫，從而進一步理解、學習。如若學習者原有認知結構不完善，勢必在理解新事物時產生困難，亦即學生原有認知結構有缺損而產生障礙，這種情況在初中學生學習中比較常見，具體來說可分為以下兩種情況：

2.1.1 未能辨析知識點之間的相似性而產生障礙

這類障礙主要是因為某些知識在書寫形式、描述方式、圖形表示等方面比較類似，學生難以分辨而產生障礙。存在這種障礙的學生，其數學認知往往處於中、下水平。例如：筆者在教學實踐中，曾有意在所教班級的同一次測試中出過這樣兩道題：

例 1 如圖 1，在直線 L 上求作一點 P ，使 $PA = PB$ ^[3]。

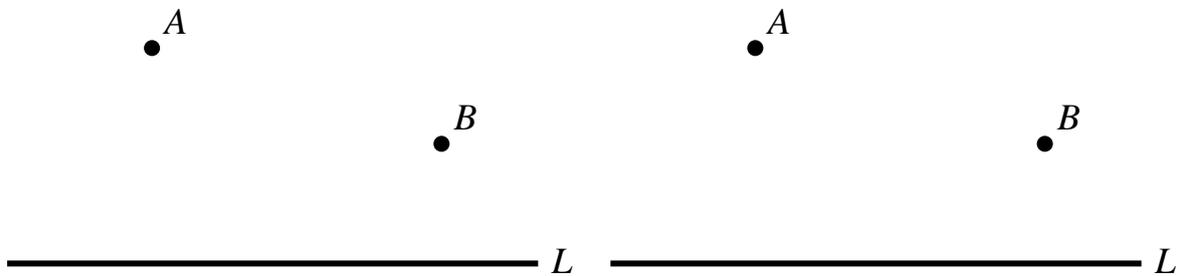


圖 1

圖 2

例 2 草原上兩個居民點 A 、 B 在河流 L 的同旁（如圖 2）。一輛汽車從 A 出發到 B ，途中需要到河邊加水。問汽車在哪一點加水，可使行駛的路程最短？並在圖上畫出該點^[3]。

測試結果表明，這兩道題的出錯率分別高達 90%，即使一些平時數學成績不錯的學生，也做錯了。原因何在？據筆者的調查與分析，發現除了學生原有認知結構不完善外，與以下三方面因素也有很大關係：一是這兩道題的圖形幾乎一樣，而且位置擺放形式完全相同；二是兩題均與距離有關；三是兩題是都是作圖題：例 1 是作一條線段的垂直平分線，例 2 是作已知點關於某一條直線的對稱點，這兩個知識點比較類似，學生容易混淆，導致解題錯誤。

其中有一位被調查的學生說：「老師，這兩道題不都是求距離嗎？我分不清應該用哪一種方法。」其實，仔細分析一下，不難發現，這位學生可能本來就沒有真正理解這兩個知識點的含義，況且這兩道題又放在這樣相似的問題情景中，自然就對其理解增加了難度，產生障礙也就在所難免了。事實上，學生在學習過程中往往存在著這樣一種假像，看似理解，實際並

沒有理解，學生潛在的認知結構缺損為以後理解障礙的產生埋下了隱患。又如，學生在化簡二次根式或求其值時，常常用到下面兩個公式： $(\sqrt{a})^2 = a$ ， $\sqrt{a^2} = a$ ($a \geq 0$)。這兩個公式在書寫形式上也非常相似，學生在應用時也容易產生障礙。類似的還有諸如「分母有理化」與「有理化因式」概念等等，在此不一一列舉。

2.1.2 未能區分概念、命題等的一般性與特殊性而產生障礙

這是指對於某些特殊的概念、命題等，學生用一般的概念、命題的定義去理解時，常常會產生疑惑、困難等。譬如筆者在教學中曾出過這樣一道測試題：

例 3 你認為平角，周角符合「角」的概念嗎？請說出你自己的觀點。

初學幾何時，「角」的概念是「具有公共端點的兩條射線所成的圖形。」但如果用這個定義檢驗平角、周角，學生就會產生疑問：「平角」、「周角」怎麼會是「具有公共端點的兩條射線所成的圖形」呢？測試結果表明：有 35.3 % 的學生認為「平角」、「周角」都不符合此定義，或認為符合，但不能說出正確理由。實際上，學生並沒有真正（從不同角度）理解「角」的概念。

2.1.3 缺乏相關背景知識或經驗，產生理解障礙

這類障礙主要是由於學生在解決實際或應用性問題時，缺乏一定的生活常識、經驗及相關知識背景，或對其他學科的專業術語瞭解甚少而造成的。如學生在解決歷年中、高考應用題時，此類障礙最易出現。

2.2 表像型障礙

當一個陌生的數學物件呈現在學習者面前時，因為其腦海中沒有與此相關的知識，所以這時學習者首先要借助於一些具體的數學模型、特殊例子等對此物件作初步瞭解，繼而形成感性認識，產生初步的數學表像，此時，這個表像是模糊的，具有很大程度的直觀性與形象性，它可能正確，也可能錯誤。然後，學習者再通過對此數學物件簡單地分析、概括，抽出其主幹部分，並歸結出它的一些表面層次的特徵、性質等，以簡單的方式進行運用，在大腦中形成一些利於記憶、接收、儲存的資訊組塊，這樣就有可能形成有關這個數學物件較好的表像，可以進行簡單地運用。實際上對於數學概念的初步理解就屬於上述過程。然而，學生在學習過程中，對於一些初始數學概念、術語、專業名詞等，往往不能很快形成正確的表像，

從而對後面知識的深層次理解產生影響，形成理解障礙。這雖是一種比較低層次的理解障礙，但學生在初步理解數學概念時，這類障礙卻常常發生，尤其在後進生中比較常見。

2.2.1 把日常語言混同於數學術語而產生障礙

有些數學概念與日常生活中的概念雖然含義不完全相同，但文字的書寫及讀音完全一樣，而日常生活中的相關概念又為學生所熟悉，從而為初學者生成正確的數學表像帶來干擾，對以後正確理解知識造成障礙。

例如：有些學生常常把幾何中的「垂直」理解為以地平線為標準的「鉛垂」的日常概念。筆者曾對初二學生出了這樣一道題目：

例 4 在下列圖中，你認為哪一個是「兩條直線垂直」？

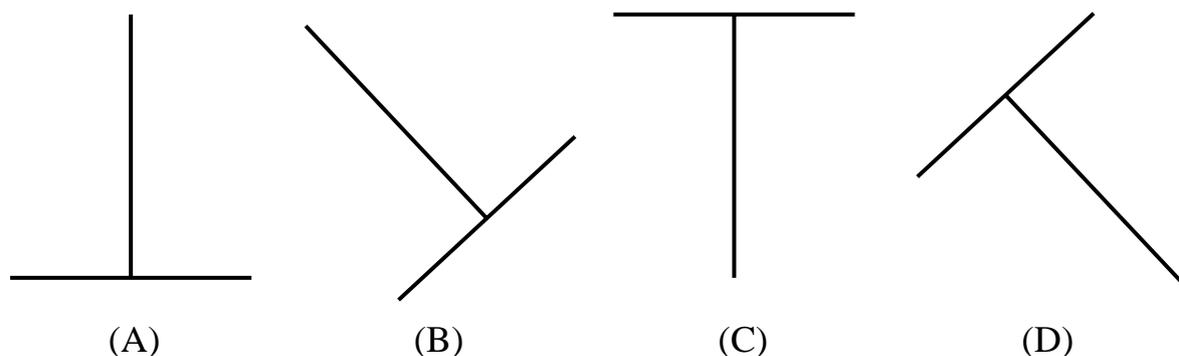


圖 3

測試結果顯示，只有 33.9 % 的學生選擇 ABCD，其餘選擇的均不正確。其中，有 36.4 % 的學生只選擇 A。經過調查、分析，筆者認為，這是因為「與地面垂直」這日常概念早已在學生頭腦中形成了牢固的表像，它對理解抽象化的「垂直」概念產生了干擾作用，所以學生誤認為只有 A 項才是「兩條直線垂直」，其餘三項都不是。類似的，還有像「相似」、「相等」、「全等」等這類概念，在日常生活中的文字書寫形式及讀音與數學中的沒什麼差別，但其意義卻有很大區別，學生在理解數學概念時，也容易受其影響，產生理解障礙，生成不正確的表像。

2.2.2 以局部的視覺表像代替整體而產生障礙

這種障礙與平時教學以及教材中所用的圖形形狀、放置方式有關。筆者注意到，在幾何教材或日常課堂教學中使用的圖形大多是單一化圖形（或標準圖形）。這裏所說的「單一化圖形」是指教材的例題、習題、教學中的板演往往只使用一種常規性的圖形，而當圖形的形狀、位置或放置方式（圖

形的性質沒有改變) 改變時, 學生便不理解、不會做或做錯。究其根源, 就是學生對這種常規性圖形已經形成了牢固的視覺表像, 只要碰到類似題目, 就會不自覺地檢索出這種表像加以利用, 以偏概全, 從而導致理解障礙。

例如: 在人民教育出版社出版的初中《幾何》第二冊(1993年版)的「三角形」(從第1頁到120頁)一章中, 筆者曾對其中例題、練習題中出現的各類三角形(指銳角、鈍角、直角三角形)的數量作了統計, 其中銳角三角形(若一個三角形中又含有多個三角形, 則以題目主指的三角形為準。)約佔73.4%, 鈍角三角形和直角三角形總共佔26.6%。由此可見, 無論是概念還是定理、例題、習題中, 所用三角形大部分都是銳角三角形, 這無疑會給學生的理解帶來一定的偏差。

2.3 聯繫型障礙

數學是一門前後知識聯繫緊密的學科, 前面知識往往是後面知識的基礎與鋪墊, 甚至有時前面內容又是後面內容的特例。所以在學習時, 不注意前後知識的聯繫, 就容易產生聯繫型障礙。筆者認為, 聯繫型障礙主要是指: 一是學生在學習新知識時不能有意識地與前面相關知識建構實質性聯繫; 二是在理解概念與感知相關圖形之間不能建立正確的聯繫; 三是在理解題設條件與論證、解答結論之間未能建立良好的聯繫。

例如: 對於二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a 、 b 、 c 均為常數, x 是引數)的理解是個難點, 尤其是對圖像的理解。但如果把二次函數與一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) 聯繫起來時, 就容易理解多了。教師如若能及時、正確地引導學生從函數值變化或解(集)的形式上建構它們之間的聯繫, 就會避免或減少學生理解障礙的產生。如圖4所示(其中 $a > 0$)。

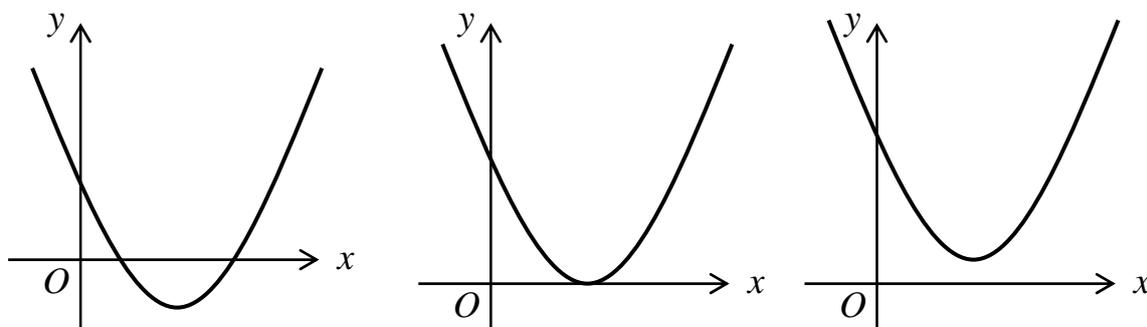


圖 4

另外，當學生理解某一數學概念或命題時，如果不能回憶起相關知識資訊，也就不能在大腦中檢索出有用的資訊，建構聯繫，這也會產生理解障礙。對於新知識，由於學生通常不可能在短時間內理解得特別好，需要在不斷地學習過程中，才能達到比較完善的理解。所以爲了進一步地學習，學生暫時記憶某些重要的基礎知識是非常必要的。

2.4 語言型障礙

語言包括書面語言和口頭語言。在不同的理解階段，學生將自己對數學知識的理解轉換成內在的思維型語言（簡稱內部語言），並用語言文字表達出來。在數學學習中這一步是非常重要的，它貫穿於整個理解過程中。理解了知識在大腦中都有某些表像與此對應，並且與其他知識點聯結在一起，想要表達出來，大腦通過語言中樞系統找到與此對應的辭彙或語句，然後再輸出來。

語言型障礙是指學生每學完一個新知識點時，未能轉換成自己的內部語言或者難以用自己的語言正確地表述出來。對於一些特殊的、晦澀的數學術語等，學生的語言表述尤爲困難。語言表述伴隨著整個理解過程而同時發生，而整個理解過程都是以語言文字、圖像等爲載體，如果語言方面存在障礙，那麼理解就會受阻，所以語言型障礙是諸理解障礙中的一種重要障礙。其次，在理解數學知識過程中，要進行一系列的思維活動，而在思考時，運用的主要是內部語言，用來檢索與新知識相關的、有用的知識資訊等，如果不能把呈現在面前的數學語言轉化成內部語言，那麼理解障礙也會隨之產生。

在理解的每一階段，都要借助於語言，因此，語言型障礙與各種理解障礙都有緊密關係。本文所論述的四種理解障礙是相互影響，相互制約的。所以存在理解障礙的學生，往往不會只產生一種障礙，而是幾種障礙同時發生。其次，數學知識主要以概念、命題、運算、應用題等形式呈現在學生面前，所以，學生在理解不同類型的知識時，所遇到的障礙也可能有所不同，從而採取的教學對策也應不同。

3. 克服數學理解障礙的教學對策

理解障礙是數學學習障礙中最重要的一種障礙。在學習過程中，每個學生都會產生不同程度的理解障礙。現在學校教育中出現大量後進生，很大一部分是由於數學學習中存在理解障礙而導致的。所以，數學理解障礙的存在是一個不可忽視的問題，極需採取教學應對措施，幫助學生克服理

解障礙。爲此，筆者進行了教學實踐、調查、分析研究，提出建議如下，供同行們思考、討論。

- (1) 幫助學生生成正確的數學表像。如在幾何教學中，使數學圖形多樣化，即使圖形的形狀、放置方式有多種變式，增強學生從多角度認識與理解知識^[1]。
- (2) 利用實物、模型等，增強學生對知識的感性認識。
- (3) 恰當地利用多媒體進行輔助教學，尤其是利用多媒體的動畫、音、色等功能，可以展示在黑板上難以顯示的知識發生、發展等過程，呈現知識的本質含義。
- (4) 運用發散思維，幫助學生從多個角度、多個層面思考，探明知識點之間的聯繫與區別。
- (5) 注重數學交流。在學校教育環境下，數學交流指在一切數學活動（包括課堂教學、課外活動）中，學生與學生之間，師生之間以書面方式、口頭方式表述對數學知識的理解情況，並相互交換意見，獲得對知識較深層次的理解。增強學生的數學交流意識，培養學生的語言表達能力，也是理解數學知識的一個重要環節。通過交流，可以充分暴露學生理解上的缺陷，促進學生相互取長補短；其次，學生在表述過程中，有一個對知識重新提煉、加工、概括的過程，從而可以獲得對知識深層次的理解。
- (6) 加強學生對數學知識的自主探究和實際應用來加深理解。

參考文獻：

- [1] 王愛珍（2004）。數學理解及理解障礙的探究。《廣東教育學院學報》，2004.2。
- [2] 曹才翰、蔡金法（1989）。《數學教育學概論》。南京：江蘇教育出版社。
- [3] 人民教育出版社中學數學室（1993）。《幾何（第二冊）》。北京：人民教育出版社。

致謝：此文承蒙王林全教授的悉心指導與幫助，在此深表感謝！