

# 利用電腦幫助培養中學生的數學空間想像能力探討

楊澤忠

山東師範大學數學系

現代多媒體計算機具有很強的類比功能，能輕鬆地類比出現實世界很多事物，能直觀地展示出各種幾何圖形，因而一般認為在數學 CAI（Computer Assisted Instruction）中現代電腦能幫助數學教師培養學生的空間想像能力。可是，在實際的教學中如何進行操作呢？即如何具體利用電腦多媒體技術來培養學生的空間想像能力呢？當前鮮有人探討。本文結合自己的一些體會擬對這個問題做一討論，求教各位專家。

## 一、中學數學空間想像能力培養的重點和難點

數學空間想像能力是現代中學數學教學中要求學生形成的一種很重要的能力。1996年國家教委制定的《全日制普通高級中學數學教學大綱》中指出：空間想像能力主要包括「能夠由實物形狀想像出幾何圖形，由幾何圖形想像出實物形狀；能夠想像幾何圖形的運動和變化；能夠從複雜的圖形中區分出基本圖形，並能分析其中的基本元素及其關係；能夠根據條件做出或畫出圖形；會形象地揭示問題本質。」

由此，當前的中學數學教學對於培養學生空間想像能力的做法主要是：首先，在日常教學中重視有關空間想像能力知識的教學，如坐標系、函數圖像、立體幾何概念等；其次，在幾何教學中注重實物模型的使用，加強幾何教學和實際的聯繫，加強識圖和畫圖的訓練，促進學生對於幾何圖形的理解和操作；再次，在平時的數學訓練中注重圖形結合方法的使用。

因此——考慮到當前的教學實際，特別是課堂教學實際——可以看出，中學數學培養學生空間想像能力的關鍵點和難點主要在於：

1. 如何使學生在原有空間觀念的基礎上進一步豐富對客觀事物和幾何圖形的表像；
2. 如何能使學生形成比較清晰和準確的表像；
3. 如何能使學生牢固掌握這些表像，並能靈活地運用它們來分析問題和

解決問題。

## 二、利用CAI培養中學生數學空間想像能力探討

多媒體電腦用於數學教學幾個最為突出的方面是：計算速度快、計算準確；能利用多媒體技術類比客觀世界的各種事物；能利用多媒體建構和展示各種幾何圖形；能利用交互功能使學生真實地參與教學中，等。由此，我們認為利用多媒體電腦輔助中學生數學空間想像能力的培養和提高，應主要遵循以下一些原則和要求：

1. 結合相關教學內容盡可能多地給學生展示具體實物圖像和圖形，在展示過程中根據教學需要盡可能地從多個角度和方位進行。

盡可能多地給學生展示具體實物圖像和圖形，這一做法可以彌補傳統教學的不足，克服傳統教學的難點，給學生呈現大量的實物圖像和幾何圖形，從而開拓學生的視野，在學生原來空間想像能力基礎上進一步豐富他們對於客觀世界的認識，增加他們對於客觀事物的表像和對幾何圖形的表像。現代心理學研究表明：表像的獲得在於對實物的感知，特別是視覺感知。感知的多樣性直接影響著獲得表像的多樣性。

根據教學要求盡可能多方位多角度地給學生展示圖像和圖形可以幫助學生對客觀實物或幾何圖形有一個整體的認識，可以使學生更好的形成正確的空間觀念。

比如，在給學生講解四面體時，我們從左右、前後、上下等多個角度去呈現它，學生必定會對四面體各個側面、各條稜和頂點有一個全面的瞭解，之後對於四面體這種特殊的幾何體有一個準確的整體的把握。

在利用電腦給學生展示各式各樣的實物圖像和圖形時，唯一的不足——和傳統數學教學相比——可能是其在給學生的視覺刺激上不如真正的實物強烈。但是，如果能較好地整合使用現代電腦的其他多媒體技術，如色彩、聲音、動畫和視頻等，在給學生展示圖像或圖形的同時合理運用，完全可以彌補這一不足。特別是當有條件達到使每個學生都能親自操作電腦來學習的時候。我們曾做過如此的測試，發現圖形圖像結合比較鮮艷的色彩和悅耳的聲音以及美觀的動畫，一樣能達到傳統教學使用實物或模型教學的效果。所以，利用電腦給學生呈現圖像或圖形時，特別是大

量的多方位的呈現的時候，應重視多媒體的綜合運用。

## 2. 結合教學要求給學生展示幾何圖形的抽象過程。

在給學生呈現了客觀實物圖像或類比圖形時，現代電腦一般能利用自己獨特的技術逐漸地淡化其中的一些內容，如圖像的側面和內部等，保留其上的關鍵點、關鍵線等一些重要元素，從而形成比較純粹的幾何圖形。給學生展示幾何圖形的抽象過程即是要求把這個過程呈現給學生。

這一做法很顯然也是對傳統數學教學的補充，它能彌補傳統數學教學中實物教學或一般圖像和圖形教學的不足，使學生看到實物圖像到幾何圖形的演變過程，幫助學生建立起幾何圖形和客觀實物之間的聯繫，促使數學教學實現上面提及的「能夠由實物形狀想像出幾何圖形，由幾何圖形想像出實物形狀」的教學目的。

另外，如此教學還可以提高學生的幾何抽象能力，特別是對於那些空間想像能力基礎比較薄弱的學生。原因是，這個過程給出了實物及其圖形之間的變換，展示了幾何圖形的來源，實際上也就是講述了其中的抽象方法。

## 3. 結合相關內容，為學生盡可能多地提供比較圖像和圖形，利用電腦技術給學生展示圖像和圖形的剖分與整合。

為學生提供比較圖像和圖形即是當學生學習了一個圖像或圖形之後，為學生再進一步展示一些與之相關的圖像或圖形。比如在學習了三稜柱之後為學生再進一步提供四稜柱、五稜柱、六稜柱、圓柱、三稜台、三稜柱等幾何圖形。在學生學習了直線與平面垂直之後再進一步呈現直線和平面平行的圖形、直線和平面重合的圖形、直線和平面任意相交的圖形、兩個平面垂直的圖形、兩條直線相交的圖形等等。在提供比較圖像和圖形時，不僅要讓它們排列在一起進行比較，而且還要使他們能交在一起、容在一起、連在一起等——必要的時候還要對圖形和圖像進行放縮或變形等。

為學生展示圖像和圖形的剖分與整合即是在教學中，根據教學需要利用多媒體技術——如動畫等——再為學生進一步展示其每一部分的基本元素。比如在學習了六面體之後，再進一步為學生展示其每個側面是怎樣的，其對角線截面是怎樣的，其每條稜是怎樣的，其一般的截面是怎樣

的，等等。再比如學習過了圓錐之後，再進一步為學生展示其母線是怎樣的、圓錐沿母線的展開面是怎樣的，其軸線是怎樣的，其沿中軸和母線的截面是怎樣的，其垂直母線的介面是怎樣的，垂直中軸的截面又是怎樣的，等等。之後，再將其每一部分合併起來，重新展示其完整的圖形或圖像。

如此教學，不僅可以使學生更好的認識於幾何圖形，使學生對幾何圖形性質的理解更加清晰和準確——這些性質包括其外部的整體性質和其自身各個部分之間的關係性質，而且還可以幫助學生形成清晰和準確的空間觀念，如六稜柱的哪一部分是三稜柱，一個稜柱怎麼會逐漸變成圓柱，圓柱中容球是怎樣的，稜台和稜柱到底差別在哪里，等等。從而可為學生將來利用它們迅速正確的分析 and 解決問題奠定堅實的基礎。

#### 4. 精心設計教學程式和選擇教學軟體，使學生能親自參與幾何圖形操作，特別是圖形的拆分、整合、翻轉和縮放等。

中學幾何教學培養和發展學生的空間想像能力，儘管給學生展示各種各樣的實物、實物圖像和圖形等是重要的，但更重要的也是最為有效的還是給學生提供機會，使學生獲得直接的幾何經驗。現代幾何教學實踐表明，讓學生直接參與幾何操作——如作圖、製造幾何模型等，可以使學生獲得的空間觀念更加準確、清晰、牢固和最能為學生將來解決問題所用。

給學生提供幾何操作機會，使學生獲得幾何經驗，當前的中學數學教學借助傳統教學工具常用的方法是：結合教學內容，讓學生製作幾何模型、繪製幾何圖形、測量幾何模型或圖形等。對於這些方法，經過了多年的教學實踐和總結，傳統教學已經駕輕就熟，取得了許多行之有效的經驗，同時我們初步的試驗也證明了：如不精心策劃教學過程——僅是簡單的將多媒體電腦像其他教學工具一樣用於數學教學，在當前數學課堂教學模式下一般難以超過傳統教學取得比較明顯的教學效果。所以，電腦輔助學生空間想像能力的培養和提高，應本著輔助的原則，在傳統教學的薄弱環節切入。

當前多媒體電腦給學生呈現幾何圖形和實物圖像與傳統教學給學生提供實物模型和幾何圖形相比，除了在視覺刺激程度上有稍弱些外，其他的電腦都優於傳統數學教學，特別是電腦能將圖像和圖形進行多方位多角度呈現，能對幾何圖形進行拆分、整合、旋轉、平移、旋轉和放縮呈現等——

正如上面已經提及的，此外，利用電腦進行幾何學習還能對幾何圖形的基本元素隨時測量和計算。這些都是傳統數學教學很難達到的或者根本無法實現的。所以，多媒體電腦用於現代中學數學教學，應精心設計教學過程和選擇教學軟體，在這些方面多給學生提供操作幾何體驗幾何的機會。

利用多媒體電腦來幫助培養學生的空間想像能力在上述方面多給學生提供體驗幾何的機會，無疑更能促進學生對幾何圖形、圖像的理解和形成清晰的幾何表像，有助於學生空間想像能力的快速提高——和前面提到的教學要求相比。因為在這個過程中學生親自動手參與了進去，運用了多種媒體來學習；這個過程中有交互，有觀察，有思考，有比較等；見到了平時見不到的現象，如幾何圖形的放縮；體會到了平時體會不到的過程，如拆分和整合幾何圖形等。我們曾將《3D 幾何畫板》（試驗版）嘗試用於高中數學教學，讓學生自主研究學習過的立體幾何圖形。具體教學過程為：首先教師給學生介紹新的幾何圖形和相關概念，如圖形的頂點、稜、底面和側面等，然後給學生介紹利用 3D 幾何畫板研究立體幾何圖形的基本方法，如怎樣取點、畫線、求中點、測量線段的長度，做平面的垂線和平行線，怎樣讓立體圖形旋轉、放大、縮小、著色、拆分、整合和變形等，然後給學生足夠多的時間去自己探索，比如讓學生對不同的點連連看，對不同的直線進行測量長度和角度，對不同的面求一下二面角，對一個立體幾何圖形進行旋轉、放大、縮小、拆分、著色，或對不同的幾何圖形進行整合等等，看看能得到什麼或者會發現什麼，最後啓發學生對這些現象結合以前的知識進行深入思考，得出結論。結果學生不僅對已知道的幾何性質有了進一步的瞭解，而且還發現了不少新的東西，比如利用正六面體的四個頂點可以聯出一個正四面體，如圖一所示；在正六面體中可以截出一個

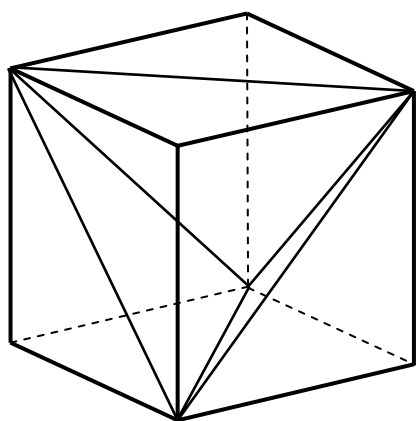


圖 一

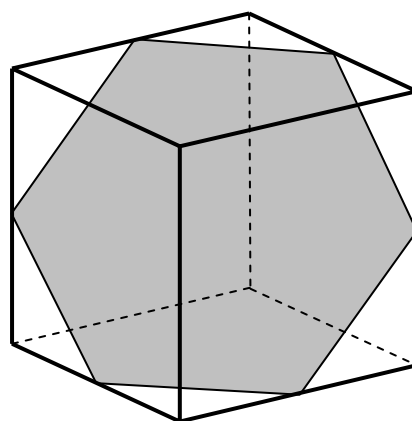


圖 二

正六邊形，如圖二所示；圓錐、圓台、圓柱的公式是緊密相連的，因為當圓台的上底面逐漸縮小變成一點的時候其就變成了圓錐，而圓錐的頂點遠離底面的變成無窮點的時候其就變成了圓柱，等等。由此，學生對於立體幾何中的四面體、六面體、旋轉體和球等幾何圖形有了更深刻的理解，他們在使用這些圖形解決新問題時明顯比比較班的學生更得心應手。

#### 5. 逐漸淡化原則。

多媒體電腦給學生展示豐富多彩的幾何圖像和圖形、使學生參與等如同傳統數學教學一樣，最終還是立足於培養學生的空間觀念，發展學生的空間想像能力。而空間想像能力的本質就在於使學生在脫離了實物模型和幾何圖形之後仍能借助其表像來分析問題、解決問題，也就是要提高學生關於幾何圖形的抽象思維水平。由此，多媒體電腦輔助學生空間想像能力的提高只是遵循上述要求還是不夠的，在此基礎上，電腦還應當發揮自己的優勢，利用多種技術逐漸培養學生的抽象思維，使學生能借助學習過的幾何圖像和圖形的表像在「空中」處理問題。

如何提高學生對於幾何圖形的抽象思維水平？我們認為在教學過程中逐漸淡化是很好的措施。逐漸淡化就是在上述教學過程之後，反其道而行之，慢慢淡化幾何圖像和圖形，首先是由動逐漸變靜，由多變少，然後是顏色逐漸由鮮艷變為單一，再然後是圖像和圖形逐漸由清晰變為模糊，直至消失——代之這些圖像和圖形的是越來越多的文字、符號和公式等，數學符號和公式的演算將逐漸取代幾何圖像和圖形的操作。這樣形的東西消失了，由此建立起來的表像留在了學生的大腦中。學生開始習慣的直觀思維也就逐漸地過渡到了抽象思維。

我們以此來進行平行正六面體的教學，具體方法是：在前面通過各種方式（如旋轉、放大、縮小、拆分、整合和著色等）呈現了平行正六面體之後，逐漸減少這種機會，先是不再呈現實物模型，然後是不再呈現可旋轉的、可放縮的和可拆分的平行正六面體，再然後是靜止的平行正六面體也逐漸少出現，最後是沒有特殊情況不再給學生呈現任何正六面體，讓學生學會利用以前見過的不同位置不同大小的正六面體的形狀在思想中分析問題。當然在這樣做之前要給學生講明白，要告訴學生這樣做的益處和開始時間，讓學生作好準備積極配合。開始時學生可能有困難，那就先讓學

生嘗試解決一些簡單的平行六面體的題目，如要求學生不看電腦呈現的圖形說出平行六面體的三對平行平面，找出其中的兩對異面直線等。然後再做複雜一點的題目，如在大腦中分析不同位置的異面直線之間所成的角，分析異面之間的距離，等等。結果教學之後幾乎所有的學生都能將平行正六面體的幾何圖形牢記在心。學生不僅能記住正六面體的整體形狀，而且還能記住其不同位置的截面性質。遇到與正六面體有關的問題，能輕鬆地提取記憶中的六面體來分析問題和解決問題。

### 三、結束語

中學數學教學對於學生空間想像能力的培養旨在使學生獲得清晰、準確的空間表像和觀念，並能使學生借助獲得的表像來分析問題和解決問題。這樣，從傳統數學教學中的難點和關鍵點出發，結合當前電腦輔助數學教學的優勢，我們認為多媒體電腦輔助空間想像能力的培養應遵循五項基本原則：一、盡可能多地給學生展示各種幾何圖像和圖形；二、給學生展示幾何圖形的抽象過程；三、為學生呈現比較圖形；四、允許學生有比較多的機會參與幾何圖形操作；五、逐漸淡化原則。

### 參考文獻

- [1] D.A.格勞斯（1999）。《數學教與學研究手冊》。上海：上海教育出版社，556 – 566 頁。
- [2] 課程教材編寫組（2003）。《面向 21 世紀中學課程教材建設研究與實踐》。北京：人民教育出版社，242 頁。
- [3] 克魯捷茨基（1983）。《中小學數學能力心理學》。上海：上海教育出版社，205 頁。
- [4] 曹才翰（1990）。《中學數學教學概論》。北京：北京師範大學出版社，79 – 80 頁。
- [5] 田萬海（1993）。《數學教育學》。杭州：浙江教育出版社，211 頁。
- [6] 邵光華（1996）。「空間想像能力及幾何教學」。《課程、教材、教法》，1996 (7)。
- [7] 國家教育委員會基礎教育司（1996）。《全日制普通高級中學數學教學大綱》。北京：人民教育出版社。
- [8] 季素月（1999）。《中學生數學能力培養研究》。瀋陽：東北師範大學出版社，144 – 170 頁。
- [9] Neil R. Carlson (1990). *Psychology*. Boston: Allyn and Bacon, pp. 217 – 249.

作者電郵：zhongzee@163.com