

「率」的疑惑

馮振業

香港教育學院數學系

引言

在中國數學史上，「率」這個觀念出現得很早。例如在《九章算術》之中，已被廣泛使用。李繼閔（1992）對《九章算術》及其劉徽注之中有關「率」的概念和運用，做了很全面的整理和分析。其中有兩點值得教師留意：（一）《九章算術》及其劉徽注之中並沒有為「率」下個清楚的定義；（二）「率」的使用很有彈性，例如：在 $2:3$ 之中，“2”、“3”和“ $2:3$ ”均可被稱為率。

中國古代的算學書，大多著重實算，對概念的鋪陳一般筆墨較少。要找有關「率」的詳細介紹頗不容易，下面是劉徽給「率」下的一個定義：

「凡數相與者謂之率。率者，自相與通。有分則可散，分重疊則約也。等除法實，相與率也。（李，1992，140頁）」

其大意是指一組（可以超過兩個）相關變化的數量，它們按指定數量可以相通，亦可乘以或除以同一數值，一般應約至最簡。

可能由於長久以來，「率」的使用都依循「只可意會，鮮有言傳」的方式，今天的課本和教師都很少把它說個清楚明確。一方面可能是怕花掉寶貴的課時，用在考試不用面對的問題上；另一方面也許是不易為「率」的多變面貌，來個簡單的總結。

本文試圖對「率」的解說作出一些瑣碎的補充，並提出一些關於「百分率」的教學問題。

二項率

在兩量相比較的情況下，今天我們習慣了把這種率看成一個分數，當

中分子量和分母量可以是相同本質的量，也可以是不同的。如屬前者，我們也可叫這率做「比」（或「比率」）。因為兩量相除，可得出兩個不同的率，所以必須把率的構成，說得明確一些。「量 A 相對於量 B 的率」是指下列的一個新的量 C ：

$$C = \frac{\text{量 } A}{\text{量 } B}。$$

例如：

$$\text{速率} = \frac{\text{走了的距離}}{\text{走這段距離所需的時間}}；$$

$$\text{貨物單位售價} = \frac{\text{貨物總售價}}{\text{貨物總數量}}；$$

$$\text{利率} = \frac{\text{利息}}{\text{本金}}；$$

$$\text{貨幣 } A \text{ 相對於貨幣 } B \text{ 的匯率} = \frac{\text{某面額的貨幣 } A}{\text{可兌換成的貨幣 } B}；$$

$$\text{賺率} = \frac{\text{賺額}}{\text{成本}}。$$

慣常用的率會有些特別的名稱，但卻不表示把構成率的分子和分母顛倒過來不是可用的率。例如：描述走路快慢除了可用每秒鐘走多少米（速率）之外，也可說每米要走多少秒（一個少用的率）；市集裏描述水果的售價，有時是「每個多少錢」（即上述的單位售價），有時也會說「每 10 元有多少個」（即貨物數量相對於售價的率）；描述港元兌人民幣的匯率，在香港常聽到的是「每 100 港元兌人民幣 …」，亦即「人民幣相對於港元」的匯率，而在內地，卻可以反過來用「每 100 人民幣兌港元 …」，亦即「港元相對於人民幣」的匯率；描述企業盈利能力，除了上述的賺率外，更常在股票市場聽到的，是「企業每股的股價相對於每股的盈利」這一個率，又叫「市盈率」。

從上面的例子可以看出，率的應用可以很自由，不只顛倒過來可以，甚至不必硬以一個（已約簡的）數表示。儘管日常應用或有特別的一套，從數學世界總愛追求簡潔的角度出發，卻沒有不把二項率以一個數表示的道理。與其說 $3:2$ ，倒不如以 $\frac{3}{2}$ 或 1.5 表示來得簡便。然而，要小心的

是，人們看到 3:2，很自然會想到是兩個量衍生的率，但單看 $\frac{3}{2}$ 或 1.5，就沒有這種感受。換句話說，(二項)率可以用一個數表示，但單看一個數而沒有其他背景資料(包括單位)，卻無法得知它是否一個率。

今天我們的習慣，是如果一個二項率是由兩個本質不同的量構成的話，就以一個數表示。(也就是不會像商販一樣高喊「蘋果 10 元 7 個」。)其他情況做出的率都叫一個「比」(或「比率」)，可以 $A:B$ 或 $\frac{A}{B}$ 表示。

多項率

不論是二項率或是含有更多項的率，都有一個共通點，就是只要確定各相關量中的任何一個的值，其他量的值也隨之確定。在二項率的情況，我們可以

$$\frac{\text{量 } A}{\text{量 } B} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

表示。等式的左方，其實就是量 A 相對於量 B 的率，右方就是這個率的值(含適當單位的)。在高中之前，一般只考慮率值為常數的情況，這時我們會稱「量 A 與量 B (依 $\frac{a}{b}$ 這個率) 成正比例」。假設下表所列為量 A 與量 B 相應的變化值，

量 A	a_1	a_2
量 B	b_1	b_2

在正比例關係下，我們可以寫

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

也可以寫

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (3)$$

要注意的是，在(2)式的寫法下，不論怎樣選 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 ，等式的值

都不變。相反地，在（3）式的寫法下，等式的值並不固定，不過左右方都是個不名數（同單位的量相除）。如果我們堅持「比」必須不含單位（也有說法指不一定的，可參看陳、殷，1992），亦即由本質相同的數量得出，那麼（3）就是兩比構成的一個等式，而（2）卻不一定是。凡是由「比」構成的等式，都叫「比例式」。像（3）這樣的比例式，有時也會寫成

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \quad (4)$$

含超過兩個量的率，其實是要指出一串兩兩成正比例的量，它們之間的變化的所依率。例如：甲、乙、丙三人合伙營商，甲出錢 \$2000，乙出錢 \$3000，丙出錢 \$5000。分利時，甲所得利相對於乙所得利 = $\frac{\text{甲所得利}}{\text{乙所得利}} = \frac{\$2000}{\$3000} = \frac{2}{3}$ ，亦即「甲所得利與乙所得利（依 $\frac{2}{3}$ 這個率）成正比例」。同理，乙所得利相對於丙所得利 = $\frac{\text{乙所得利}}{\text{丙所得利}} = \frac{\$3000}{\$5000} = \frac{3}{5}$ ，亦即「乙所得利與丙所得利（依 $\frac{3}{5}$ 這個率）成正比例」；丙所得利相對於甲所得利 = $\frac{\text{丙所得利}}{\text{甲所得利}} = \frac{\$5000}{\$2000} = \frac{5}{2}$ ，亦即「丙所得利與甲所得利（依 $\frac{5}{2}$ 這個率）成正比例」。濃縮一點，我們可以把資料寫成

$$\frac{\text{甲所得利}}{\$2000} = \frac{\text{乙所得利}}{\$3000} = \frac{\text{丙所得利}}{\$5000} \quad (5)$$

由於所涉量本質相同，我們也可用「比」的形式表示如下：

$$\text{甲所得利} : \text{乙所得利} : \text{丙所得利} = \$2000 : \$3000 : \$5000 \quad (6)$$

這些含三項或以上的比叫「連比」。

反比例

相對於 $a : b$ 這個「比」，我們稱 $b : a$ 為它的「反比」。如果量 A 和量 B 的變化，滿足

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1},$$

即把等式(3)的其中一邊的比以它的反比代替，我們稱「量 A 與量 B 成反比例」。這裏量 A 與量 B 的變化，不像「正比例」的情況下，依

$$\frac{\text{量 } A}{\text{量 } B} = \text{常數}$$

的規律，而是依

$$\text{量 } A \times \text{量 } B = \text{常數}$$

的規律。

在小學或初中教授反比例時，總比較教授正比例棘手。一方面是正比例有「率」(兩量的商)可依，另一方面是反比例下兩量的積往往是一個不易說明的常數(馮，1999)。在高中階段，換了一套代數語言，透過變分法(量 A 與量 B 反變)，反比例的學習障礙彷彿消失於無形。甚至像下列的複比例問題(同時涉及正、反比例的問題)，也許忽然變得相當容易：

12 人用 6 日可完成 3 件工程，問 8 人要用多少天才可完成 5 件工程？

這裏天數與工程件數正變，與人數反變，列列式，解解方程，一切都輕而易舉。不過，有多少教師會在變分法一課，把它如何統攝正、反比例的來龍去脈說個清楚卻不得而知。至於在變分法一課插入上述問題(不提變分術語)，看看學生如何面對，更是非常有趣的實驗。

在小學階段，欠缺了成熟的代數技倆，只有從塗方格做起。如能小心帶領，簡單的反比例問題不會難倒學生的(鄧，2000)。

百分數與百分率

在香港，時常有小學教師問：「百分數和百分率有何不同？」要回答，

先要弄清百分數的意義。這裏給出兩種意義讓讀者考慮：(一) 百分數即分母為 100 的分數；(二) 百分數即分母為 100 的分數，並且是用來表示某數是另一數的百分之幾（陳、殷，1992）。前者只著眼數的表示方式，後者卻另加了這個數是一個二項率的要求。不難看出在（一）的意義下， $\frac{7}{100}$ 自然是一個百分數，它是否一個率卻不能從其表示方式得知；相反，在（二）的意義下， $\frac{7}{100}$ 是否一個百分數是無法確定的（怪嗎？），因為不知它是否一個率。若然已知 $\frac{7}{100}$ 是一個百分數，它自動就是一個率。

既是分母為 100 的分數，又是一個率，就叫「百分率」。明顯地，在（二）的意義下，「百分數」和「百分率」是同義的，根本不須兩個名稱。

目前國內是用（二）這個說法的，因為統一的關係，混淆基本上是不存在的。反觀香港，說法比較分歧，也不知道是何種說法居於主流。有些香港的教師會以「 $\frac{7}{100}$ 」為百分數，「7 %」為百分率作界定；有些乾脆含糊其詞算了，反正考試不會考的。

另一個相關的教學問題就是「%」號（一般叫百分號）的意義，最直接的說法就是「 $n \% = \frac{n}{100}$ 」。連結（一）的百分數意義，就知 $n \%$ 也是一個百分數，但不肯定是否百分率。這個直接的說法的好處就是容許含「%」的數、分數、小數等可以自由互化而不必另加註腳，但壞處卻是要處理諸如「 $\frac{7}{100}$ 厘米可否寫成 7 % 厘米？」或「 $\frac{7}{100}$ 可否寫成 (7%) %？」等潛在混淆。在（二）的百分數意義下，凡寫成「 $n \%$ 」的都必須已確認是百分數（亦即百分率）， $\frac{7}{100}$ 厘米自然不可寫成 7 % 厘米，因為它不是個率（註：好事之徒也可硬說這 $\frac{7}{100}$ 代表 7 這個數佔了 100 這個數的百分之幾，然後把它改成 7 %）。於是不可以隨便把一個分數化成若干 %，要

另加註腳，不過這瑣碎補充恐怕也少人在意的。

「折扣率」的疑惑

雖然「折扣」是一個小學數學課題，歸入百分數應用系列（香港課程發展議會，2000），但它卻並非一致地被視為數學術語，翻查數學辭典或會空手而回的。例如，在 Borowski 及 Borwein（1991）的 *The HarperCollins Dictionary of Mathematics* 及其譯本，均找不到的。有學者更指明它是商業用語：

「折扣是商業用語，打折扣表示按成數減少。如某種商品打八折，即按原價的八成（80%）出售，打七五折即按原價的七成半（75%）出售。（顧、葉、王，1995，205 頁）」

即使在辭典或書籍中可以找到有關「折扣」的解說，其意義也會有點含糊的。例如上面引述的解釋，只交代實際用法，卻沒有指明「折扣」是甚麼。

如果我們習慣了 $\text{賺率} = \frac{\text{賺額}}{\text{成本}}$ ，很自然會望文生義地想到 $\text{折扣率} = \frac{\text{折扣額}}{\text{原價}}$ 。因此，要弄清折扣率是甚麼，得先弄清折扣額是甚麼。

儘管「折扣」一詞十分常見，與其相關的「折扣額」和「折扣率」卻不然。在翻查資料的過程中，筆者甚至懷疑它們可否被稱為專有名詞。最後找到一個說法（葉，1983），指出「折扣者，由某量減去若干之謂。（36 頁）」而「折扣額」是指省回的金額。依上述意義推斷，「折扣率」應被理解為「省回的金額相對於原價的率」。

可是，也有說法指「用百分率表示售價是定價的多少折叫折扣率。（張、張，2003，52 頁）」撇開要求以百分數表示（即應稱為折扣百分率）不說，這裏的「折扣率」卻被理解為「售價相對於原價的率」。至此，矛盾已清楚浮現：「折扣（百分）率」，究竟是指「減少的部分佔原價的百分之幾」，還是指「現價是原價的百分之幾」？例如：某件商品原價 100 元，現價 80 元。求該商品的折扣率。學生應答

$$\text{(甲) 折扣率} = \frac{100 - 80}{100} \times 100\% = 20\% ,$$

還是

$$\text{(乙) 折扣率} = \frac{80}{100} \times 100\% = 80\% ?$$

在解決這個問題之前，不妨先看看「折扣」理解的華洋分歧。以下是關於折扣的雙語解說，從中可以看出文化的差異：

「買賣貨物時，照標價減去一個數目，減到原標價的十分之幾叫做幾折或幾扣，例如標價一元的減到九角叫做九折或九扣，減到七角五分叫做七五折或七五扣 discount; rebate. When a price is reduced by a certain percentage in doing business, it is called a certain per cent discount, e.g. if the price is 1 yuan and then reduced to 90 cents, it is called a 10 per cent discount, while if the price is reduced to 75 cents, it is a 25 per cent discount. (中國社會科學院語言研究所詞典編輯室，2002，2429 頁)」

從上面的引述可以看出，華人社會的折扣運用強調要付的金額，相反地西方則注意少付的金額。

從數學用語的一體性考慮，(甲)才是正確的；從文化環境考慮，在華人社會，(乙)比較貼近生活現實。這裏沒有圓滿的解決方案，走向任何一方都有缺陷。

在中西文化交匯的香港，見英文找其中文翻譯，見中文找其英文翻譯的情況十分普遍。由於英語對折扣的描述符合數學用語的一體性，從 discount 想到 discount rate 顯得理所當然。再翻一翻詞匯對照的工具書，找到 discount rate 應譯作「折扣率」(科學出版社名詞室，2002，181 頁)，混淆隨即出現。在教師的立場，也許迴避「折扣額」和「折扣率」等詞語會

是一條出路。作為中華文化的重要參考書，《辭海》顯然也採納了這條路線。其中我們可以找到「折舊」、「折扣」和「折舊率」（辭海編輯委員會，1999，1908—1910 頁），獨「折扣率」一詞卻沒有出現！

這裏提出的混淆，在香港會較令人擔心。須知不少學生會在高小以中文學習折扣，隨即又在初中以英文再接觸大致相同的內容。然而，如果我們的數學教育做得穩妥，當學生學多了，自會習慣數學世界中，先申明定義，再進行討論的工作模式，岔子是出不了的。更進取的，甚至可以透過這片題材，說明日常用語和數學用語的異同。

本文經深圳市荔園小學魏彬老師提供寶貴意見，謹此致謝。

參考資料

- Borowski, E. J., & Borwein, J. M. (1991). *The HarperCollins dictionary of mathematics*. New York: HarperCollins. (貓頭鷹編譯小組 (譯) (1999), 《數學辭典》。台北：貓頭鷹出版社。)
- 中國社會科學院語言研究所詞典編輯室 (2002)。《現代漢語詞典：漢英雙語》。北京：外語教學與研究出版社。
- 李繼閔 (1992)。《〈九章算術〉及其劉徽注研究》。台北：九章出版社。
- 科學出版社名詞室 (2002)。《新英漢數學詞匯》。北京：科學出版社。
- 香港課程發展議會 (2000)。《數學課程指引 (小一至小六)》。香港：教育署。
- 張梅玲、張天孝 (2003)。《現代小學數學》六年級上冊。北京：科學出版社。
- 陳鋼、殷三益 (1992)。《小學數學改錯大全》。北京：中國少年兒童出版社。
- 馮振業 (1999)。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。
- 葉崇真 (1983)。《簡明數學辭典》。香港：香港萬里書店。
- 鄧佩玉 (2000)。反比例教學，收入 梁興強 (編)《香港數學教育會議 2000 論文集》，109—119。香港：香港教育學院數學系。
- 辭海編輯委員會 (1999)。《辭海》普及本上冊。上海：上海辭書出版社。
- 顧汝佐、葉季明、王明歡 (1995)。《小學教學全書：數學卷》。上海：上海教育出版社。