

## 遊戲與數學教育

王幼軍

上海師範大學教育科學學院

根據統計，剛入小學的學生幾乎都喜歡數學，本能的好奇心是學生最大的學習動力。他們根據各種方法創造性地理解、學習數學，然而，隨著年齡的增長，許多學生的數學學習的動力會逐漸減弱，他們對於數學的態度往往是漸漸地由熱忱變為冷漠，由自信變為害怕，由主動變為被動，甚至完全放棄。即使在迫於考試的壓力堅持下來的學生中，升入大學專門從事數學研究的人也鮮有出於由衷，近幾年大學數學系招生以及高等數學教學的困境從一定程度上反映了這一問題。這種現象是值得我們數學教育工作者關注與反思的。考察產生這些變化的原因，我們發現有很多。例如我們的社會和文化過高地評價那些急功近利的活動，而相對孤立的安靜的思維活動，特別是數學思維卻由於不能看到直接的利益而為人所輕視，等等。當然，這種現象形成的最直接的原因則來自於人們在學校所接受的數學教育的影響。當前學校數學教育大大地忽略了數學中生動有趣的遊戲因素，而使數學活動過早地染上為考試服務的功利性色彩，從而使數學這一多姿多彩的人類的智力活動變成一個形式呆板的操作科目。因此，從這個角度來說，探索遊戲對於數學教育的作用是非常必要的，而對於這個問題的探討則必須首先從數學與遊戲的關係談起。

### 一、數學與遊戲的關係

遊戲是一個廣泛的概念，它包括任何一種旨在消遣時光或尋求娛樂的活動。數學則是帶有藝術風度的智力工作，同時是具有巨大的實用價值的科學。這兩個重要的人類活動具有密切的關係，它們具有相互滲透、相互統一的關係，這種統一主要體現在它們的性質、形式以及實踐三個方面。

首先，數學與遊戲作為兩項人類活動具有許多共同的性質。有人曾經對此進行了深入的分析，例如，兩種活動本身是為了鍛煉心智，而不是單純地為了從中獲取利益；兩者在人類的發展中起著一定的作用，像豐富情感、獲得知識、發展智力和能力，從而為將來的競爭和生活做準備，體驗解放、回避和放鬆、滿足好奇心等感覺；在深思熟慮、實施以及取得成功

的過程中能夠得到巨大的樂趣。在兩者的空間裏都可以創造一種新秩序和充滿和諧韻律的世界；兩種活動都需要有自己獨立的時間和空間等。

其次，數學與遊戲的系統結構也有共同的形式。數學具有演繹體系或稱為公理化系統，這種系統由不加定義的概念（原始概念），不加證明的命題（公理）組成。其中原始概念的含義由公理體現出來。任何遊戲在一開始都是介紹一些物件或部件，一系列的規則，這些物件或部件的作用由那些規則所決定。兩者的相似是顯然的，它們的差異只是叫法不同而已，數學中的不加定義的概念對應著遊戲中的物件或部件，公理對應著遊戲的規則，數學中的定理則對應著遊戲過程中的每一狀態。兩個系統中都有「定義」，也都有「證明」。正是由於數學與遊戲的形式結構的相似，許多數學家談到了數學即是遊戲的觀點，例如，20世紀初數學哲學中形式主義學派的代表人物希爾伯特就曾提出一個極端的觀點：「數學是根據某些簡單規則使用毫無意義的符號在紙面上做的遊戲。」

第三，數學與遊戲的實踐也有共同的特徵。任何人在開始做遊戲時，都必須對它的規則有一定的瞭解，將各部件的相互聯繫弄清楚，就像數學的初學者那樣，用同樣的方法比較並建立該理論中的基本元素之間的相互作用，這些就是遊戲和數學理論的基本練習。無論在數學中還是在遊戲中，較深層次的、更複雜的步驟和策略的運用都需要特殊的洞察力。在玩高級遊戲的過程中，總是有問題出現，人們總想要在從未探索過的遊戲情境中用首創的方法來解決，這對應於數學理論中未解決的問題的研究。在創造新遊戲的過程中，需要設計情境，給出新穎的策略和創造性的遊戲方式。將其與創立新的數學理論相類比的話，就相當於提出新穎的思想和方法，並將之應用於其他未解決的問題，從而更深刻地揭示現實生活中某些至今尚不明的真理。

因此，從廣義上來講，可以說數學是一種遊戲，只不過這種遊戲要涉及到科學、哲學、藝術等更廣泛的人類文化範圍。從狹義上說，數學中的遊戲是指那些具有娛樂和消遣性質的並帶有數學因素的遊戲和智力問題。正是由於數學與遊戲之間的共性，許多問題和內容很難說是應歸於純數學研究還是歸於有趣的智力遊戲；更難於區分人們對於數學的興趣是由於數學中的遊戲因素，還是由於數學的其他因素。總之，數學中有遊戲的精神，遊戲中有數學的思想，很難在兩者之間畫出一道嚴格分明的界限。

## 二、遊戲在數學教育中的作用

數學與遊戲之間相互滲透、相互統一的關係使得遊戲對於數學教育具有極大的價值，實際上這一點已被古往今來的數學教育的理論和實踐所證明。對此，著名的美國科普作家馬丁·加德納（M. Gardner）曾經作過精闢的評價「喚醒學生的最好的辦法是向他們提供有吸引力的數學遊戲、智力題、魔術、笑話、悖論、打油詩或那些呆板的教師認為無意義而避開的其他東西。」具體說來，遊戲在數學教育中的作用主要表現在以下幾個方面：

第一，遊戲是數學知識大眾化的最好手段，這是因為遊戲在數學知識的傳播和普及中起著非常重要的作用。在數學的歷史上，遊戲一直伴隨在數學教育的普及和數學知識的傳播過程中，在人們津津樂道、相互傳誦遊戲的過程中，也將有關的數學知識和數學思想傳送給四面八方的人。例如，成書於西元前 1700 年的古埃及的阿默士紙草書（也稱 Rhind 紙草書）是為當時的貴族和祭祀階層所作的一個普及性的數學問題集，實際上也是一本教科書，其中有些問題是以有趣的歌謠或故事的形式編寫而成，因此流傳很廣。以把嚴謹的公理思想引入數學而著稱的歐幾裏得也在已經失傳的一本名為《糾錯集》（Pseudaria）的書中使用了一組有趣的謬論，作為激勵他的學生進入正確思維過程的手段。中世紀義大利數學家斐波那契（J. Fibonacci）的《算盤書》是一本廣泛流傳於歐洲各國的著作，這本書流傳的原因除了它的內容實用之外，還因為把數學內容寓於生動有趣的遊戲之中，如「兔子繁殖問題」、「蓄水池問題」、「野兔和獵狗」、「七個老婦」等幾乎成為家喻戶曉、人人皆知的數學遊戲，此書喚起了歐洲人對於數學的興趣和重視，為以後歐洲數學的復興奠定了基礎。在世界各地都曾經流傳一些著名的數學遊戲，如古代中國的韓信點兵、百雞問題、七巧板、大衍求一術。古印度的蓮花問題、蜜蜂問題……，等等。這種以遊戲的方式來處理數學情境的目的就是使數學思想更容易為人們所理解和接受。

從 19 世紀末期開始，由於遊戲在數學知識的普及與傳播中的獨特的作用被越來越清楚地意識到，關於數學遊戲的收集、編造以及解答等方面的研究受到空前地重視，在眾多的研究者中，影響最大的是馬丁·加德納的工作，他曾在美國的著名科普雜誌《科學美國人》（Scientific American）上主持「數學遊戲」專欄。他工作的特點是把許多數學思想或知識寓於各種奇妙有趣的故事和問題之中。這些題目初看似乎很難，有時冥思苦索，百思不得其解，但如果放開思路，打破框框，從各種角度去考慮，也許很

快就會有所突破，具有「啊呵！靈機一動」的特點。這些妙趣橫生的作品使數以百萬計的人陶醉于數學樂園之中。以後這些趣題被彙集成冊以各種文字出版多次，其影響廣泛而又持久。最近，英國數學家康韋(J. H. Conway)等人在所作的《數學遊戲獲勝的方法》一書中說：「馬丁·加德納比任何人將更多的數學帶給了千百萬人。」這句話在肯定了馬丁·加德納的貢獻的同時，也道破了遊戲對於數學傳播和教育的有效性。

第二，遊戲是數學人才發現的有效途徑，遊戲是許多數學人才進入數學研究領域的踏腳石。歷史上許多數學家正是由於解決了某個遊戲難題而發現自己具有數學潛能，從此放棄其他選擇而獻身數學。一個最典型的例子是泊松對數學的選擇。法國數學家西米爾·泊松(S. D. Poisson)年青時曾經為找到一個適合自己的職業而大傷腦筋，他的父親要他學醫或法律，但他缺少這方面的興趣。正在苦苦尋覓之時，一道趣題使他意識到自己的習性和興趣傾向於數學方面。以此為開端，他開始了數學研究生涯。一道遊戲趣題而成為他一生的轉捩點。

一般來說許多具有數學潛能的人往往從小表現出對遊戲的迷戀和酷愛以及在解決方法上的靈活和機智。所以遊戲往往成為檢測一個人的數學和推理能力的一個標準。如果說上述例子還不足以說明這一點的話，還可以舉出許多涉足過遊戲的數學家：對賭博癡迷終生的義大利數學家卡爾達諾；由魔術師成為 20 世紀有影響力的美國數理統計學家戴康尼斯(Persi Diaconis)；從小就以玩遊戲出名的英國數學家康韋、此外還有萊布尼茨、伯努利、高斯、哈密爾頓、馮·諾伊曼……，遊戲成為自我檢測數學才能的試金石。現在各種數學競賽中包含許多數學遊戲問題，這種做法實際上也是基於「遊戲可用于選拔數學人才」的理念。

第三，遊戲是獲取數學內容的有效方法之一。遊戲之所以具有難以抗拒的魅力的一個很重要的原因是遊戲所涉及的問題和內容有趣迷人、淺顯易懂。另外又不需要過多的預備知識，只要掌握一般的基本知識，初學者即可登堂入室，理解某一門學科的許多的重要內容。因此數學遊戲常被用來作為嚴肅數學的一種表現方式，使之更易理解和更具趣味。遊戲還為不同年齡層次的人提供了這樣的機會——通過具體的經驗為今後進一步學習抽象內容預備了直觀想像的空間。例如，在折紙遊戲中，如果折紙的物件是一個正方形的紙張，留在正方形的紙張上的折痕揭示出大量的幾何物件

和性質：相似、軸對稱、心對稱、全等、相似形、比例、以及類似於幾何分形結構的疊代。折紙的過程也極具啓發性：開始用一個正方形（二維物體）的紙張來折一個立體（三維物體）。如果折出了新的東西，那麼折紙的人就把這個立體攤開並研究留在正方形紙上的折痕。這個過程包含了維數的變動：一個二維物體到三維物體，又回到二維，這就跟投影幾何的領域發生了關係<sup>[3]</sup>。

第四，遊戲與數學結構的相似性保證了遊戲有利於數學思維的培養，從而使學生更深刻地理解數學的精神。例如，電腦遊戲可以發展幾何的空間感覺和意識；某些棋類或字母遊戲提供了公理系統的體驗，從而使遊戲成爲學生從具體過度到抽象數學證明的橋樑；通過多米諾骨牌可以得到數學歸納法的直觀體驗；走迷宮的遊戲可以使人體驗拓撲、邏輯的思想……。日本京都教育大學首屋誠司教授的研究還表明可以把諸如曲率、積分、群、子群等近現代抽象的數學思想通過繪圖等方式化爲「現實的」遊戲，會讓學生學會用數學的思維方式看待事物。通過遊戲也會使學生體會到數學的一種精神：數學不是一門一成不變的課程，數學知識也不是絕對的真理，「數學是人類心靈的自由創造。」或者說數學思想是人的想像力的創造物。數學世界獨立于我們的現實世界，儘管它和現實世界以不可思議的對應聯繫起來，並成爲人類認識自然界和認識人類社會自身的有效工具，這正是數學的奇妙所在。

最後，遊戲可以培養正確的數學態度，這一點主要體現在兩個方面。一方面，遊戲是培養好奇心的有效方法之一，這是由遊戲的性質決定的——趣味性強、令人興奮、具有挑戰性等。好奇心又爲探索數學現象的奧秘提供了強大的動力。如果學生沒有對於這門學科的強烈興趣和探索未知問題的好奇心，那麼數學學習將是一項艱苦而緩慢的工作。許多數學家開始對某一問題作研究時，總帶著與小孩子玩新玩具一樣的興致，先是帶有好奇的驚訝，在神秘被揭開後又有發現的喜悅。人們從事數學活動就是在進行某種趣味四溢的遊戲，數學中的遊戲因素給數學帶來了無窮的魅力，從而吸引了一代又一代人的目光，大大加速了數學的發展。另一方面，遊戲還可以培養學生養成樂意吸取不同的思路、勇於創造的研究態度。許多研究人員都爲遊戲和不同思路之間的關係之密切提供了大量的事例。例如，一個孩子玩積木時，可能會嘗試著用不同的組合方法來觀察把一塊積木放在另一塊上面時，擺多少塊可以不到下來。她邊玩邊對自己的設想進行判

斷，充分發揮了她的主動性和創造性。並且她還可以用從遊戲中所獲得的思路和方法去解決其他的問題。在遊戲時所用的不同思路就是在為某種任務或問題尋找解決方案，可以說遊戲是最高形式問題研究。所以，在數學教育注重問題解決能力的培養、強調研究性地學習的今天，遊戲無疑是一種非常有效的方法，遊戲為我們的教育目標的實現提供了大量的機會。

綜上所述，我們看到遊戲與數學之間具有特殊的關係，遊戲在數學教育中起著重要的作用。所以，從理論上探討數學與遊戲的關係及其遊戲的數學教育價值對當今數學教育研究和實踐具有深刻的啓迪作用和借鑒意義。當然應當指出，由於遊戲本身並不是數學的終點，在數學教育中遊戲的方法並不能代替一切，但是，如果在正規的教學方法之外把生動活潑的遊戲因素摻入教學中去，那麼數學教育將會起到事半功倍的效果。此外，在學生的數學負擔日益加重的今天，數學與遊戲的關係也會促使人們進一步全面地思考「數學的思想方法和本質究竟是什麼？」這一根本問題，這是數學教育觀念形成的最基本的出發點。或許這也是遊戲的數學教育價值給我們教育工作者的最大啓示。

### 參考文獻

- [1] Garrin McMain (1982). *The Game of Science*. 4th Ed, Monterey, Calif: Brooks/Cole Pub. Co.
- [2] Don Gernes (1999). *The Rules of the Game*. *The Mathematics Teachers*, Vol. 92. 5
- [3] Rudiger Thiele. *Mathematical Games*. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Vol.2, 1555–1567
- [4] David Singmaster. *Recreational Mathematics*. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Vol.2, 1568–1575
- [5] Donald J. Albers, G. L. Alexanderson (1985). *Mathematical People*. Boston Basel Stuttgart.