

# 培養小學生解決數學問題能力的教學起步點<sup>[1]</sup>

黃家鳴

香港中文大學課程與教學學系

自從九十年代以來，數學教育改革一直是香港課程發展的一個討論熱點。無論是數學教育的目的、目標，數學課程的內容、組織方式，以致教學方法等，都得到教師和課程發展工作者頗多的關注。踏入廿一世紀，香港中小學都開始逐步實施新的數學課程。<sup>[2]</sup> 相較於沿用自八十年代中期編訂的中小學數學課程，新課程在教學宗旨與重點上，都有所拓展。即如數學知識內容與學習過程並重，既重視基礎知識和技巧，亦強調學習、思維、溝通能力等方面的培養，而且更包括對數學學習態度方面的考慮，尤其強調數學在日常生活中的應用及學生高層次思維能力的發展。<sup>[3]</sup>

爲了配合新課程所提出的目標，在課堂教學中更多地運用適切之探究、解題活動，以刺激學生思考，鼓勵更多師生間的討論、互動，從而促進學生高層次思維和溝通能力的培養，乃是數學教學模式上的一個新趨勢。對於那些一向重視學生參與、強調理解的數學教師，新課程的確提供了更多的發揮空間。然而，對於較習慣於傳統講授模式、強調熟練技巧的教師，就有必要多作些新嘗試，以掌握這些著重討論、互動的教學模式的相關知識、經驗和技巧。無論如何，在設計課堂教學活動時，以解決數學問題（mathematical problem solving）作爲一個焦點，乃當前改進數學教學的重要方向之一。

其實問題解決一直是數學教育中的重要環節，最經典的提法莫如波利亞（George Polya）在 1945 年出版的《怎樣解題》（*How to solve it*）。<sup>[4]</sup> 對於將數學視作解決各種實際應用問題的工具而言，數學學習成果理所當然地應該以能否有效運用習得之數學知識、思考策略等，於解決千變萬化的數學問題爲評準。也許由於本地教育系統中，考試模式一直主導了教學的取向。作爲升學手段，教師們不得不預備學生應付校內校外的各式測驗、考試，教學往往只能針對訓練學生解決一批常規或典形的數學題。寧可以記憶公式、背誦典形題，去取代較能靈活解題的理解和思考策略。久而久

之，就形成一種特有的數學學習文化，教師、學生都對偏頗的「熟能生巧」深信不疑，強於常規的運算題，卻又缺乏面對新問題的策略和信心。這樣培養出來的問題解決能力，只能說是片面的、有缺陷的。<sup>[5]</sup>

當前新課程對解決數學問題能力的重視，應可視為扭轉這個不健康局面的契機。然而，能否開創新局面，除了改變各種考核、篩選學生的方式、制度外，關鍵始終在於教師能否有效地通過課堂教學培養學生的解決問題能力，以促進學生對數學的理解、思考來取代過量空洞的操練。由於問題解決是數學教育的重要課題，這方面的研究文獻、專書、教材等，實在不勝枚舉。教師要找相關的參考資料並不困難。<sup>[6]</sup> 這裏筆者嘗試談談幾點個人想法，希望給計劃在教學中培養小學生解決問題能力的數學老師們作為起步的參考。

首先談談數學問題的類型。一直以來，無論老師、學生都習慣了教科書、補充練習本所提供的練習題，當中既有計算題，亦有文字題。這些練習題一般都提供不多不少的數據、資料，通過一個特定的運算過程，從而得到一個唯一正確的答案。而有關的運算過程，通常是涉及某特定教學單元內容所教授的數學公式、方法。不難想像，以這種方式解決大量近乎典型的數學題，學生很容易養成一種不尚理解而只套用公式、運算法則以求解數學問題的習慣。每當遇上難懂的概念、問題，這種不求甚解、硬套公式的現象就更為明顯。

為著拓闊學生對數學解題的經驗和想法，亦由此引導學生學懂先理解、仔細分析數題，再尋求合適的策略來解答，老師應該在教學中靈活運用更多不同類型的數學問題。<sup>[7]</sup> 例如資料過多或有欠缺的數學題、容許多個答案或不同解答方式的數學題，又或者以現實處境出發的應用題，以致近年相當熱門的開放題（open problem）。<sup>[8]</sup> 透過接觸變化多端的數學題目，學生才能體會理解概念、公式、數學關係、定理等的重要性和實用性，才有機會嘗試獨立思考，掌握一般的問題解決策略。教師若要設計這類題目，既可以參考各種本地或外地的數學教材，亦可以因應現實情境擬題，令學生看到生活環境處處皆學問。

還有一點與數學問題類型相關的，值得教師考慮。就是傳統數學習題的設計，往往為著配合個別單元的學習，解決某單元的習題所涉及的知識

往往僅限於該特定單元之內，鮮有同時需要不同單元的數學知識、方法的綜合運用。這種擬題方式，很自然地強化了學生以學習單元歸類、再套公式作為主要的解題策略。然而，這種粗疏的解題策略，一旦脫離開教科書的常規練習題，就寸步難行。為著打破這個偏頗的思考方式，教師可以嘗試設計一些跨單元的數學問題，滲入平日的單元教學模式之中，讓學生有機會明白靈活運用以往習得的知識的需要，也有機會學習綜合性的解題策略。作為開始，很多現實情境中的應用問題都屬於這一類。

當然，搜集、設計各類數學題目只是材料預備階段，如何在教學上運用也得再費一番周張，靜態和動態的運用方式亦各有不同。最簡單的當然是分配這些不同類型的數學習題作為學生的堂課和家課。可茲運用的練習題題庫豐富了，也多樣化，已經是很不錯的開始。縱使是這樣簡單的運用方式，老師也可以嘗試利用合適的機會，解釋個別數學問題的解法與奧妙之處。由於純粹作為靜態的、「附加的」(add-on)方式進行，投入不必太多，教學法方面需要的改變亦不會太大。不過，學生的得益自然也比較有限，估計稍為主動進取的學生或者較能從此方式中獲益。

若要較全面地進行數學解題的教學，就必須在教學法上有所調適。配合個別單元及相關數學問題的內涵，設計課堂活動。其中可以包括解說、指導與自我啟發、個別堂課、小組活動、討論、匯報等，讓學生對整個解決問題的程序、細節有清楚的認識和理解，亦有親身的經歷。簡而言之，通過這些課堂活動，人際層面共同進行的解題策略及所執行的程序，會漸漸內化成為個人獨立思考、解決問題的參考及發展基礎。這個教學過程中，教師的角色非常關鍵，需要靈活多變，因時制宜。時而為領導者、發號司令，時而提供協助、提示、輔導，時而需要鼓勵、安慰，甚至調停糾紛，時而引導個別學生繞過障礙，時而看準時機提出解說、綜合，再加入新的問題，引導、挑戰學生再闖關。由此可見，教師的任務殊不簡單，亦無可取代。教師既要對有關的數學內涵有全盤掌握，對學生的思路、反應有足夠的認識和估計，教學過程中又要見機行事，才能稱職。<sup>[9]</sup> 當然，以上的提法知易行難，也不可能按照「說明書」(manual)或者「行動清單」(operation checklist)之類來執行，因為判斷時機本身就涉及透過經驗之眼去觀察。故此對於較習慣於傳統講授模式的教師，由於缺乏經驗，未必可以同時兼顧以上各方面。筆者建議這些欲起步的教師先從自己較熟悉的數學單元、運用自己較有經驗的教學策略，作一些初步的嘗試、檢討、再嘗

試。若能認真從事，累積經驗，並加以反思，通過彼此觀摩教學，不斷與同儕交流心得，自會漸入佳境。

必須一提的是，課堂上除了啟發、協助學生完成數學習題的解答，教師亦應引導學生回顧、檢討整個解題過程，讓其從所得結果重新審視問題各個細節之間的關係，看到問題得以解決的關鍵所在。這個步驟在高小課堂中應該循序漸進地發展起來。一方面可以培養學生反思的習慣，令學生成爲更主動自覺的學習者、思考者。另一方面，通過這樣的回顧，學生對有關的數學知識內容，亦會產生更深一層的理解，促進融匯貫通。<sup>[10]</sup>

話雖如此，但要認真評估這種強調培養解決數學問題能力的教學方式的成效並不容易。其一，問題解決不單在於解答，也在於整個解題過程。換句話說，單看經整理、記錄下來的解答，並不能評定學生對解題策略的運用水平，除非這個過程本身也留有適度的記錄。有些研究者發展出來的測試工具或可派用場，但並不實際，難以普及，亦未必適合不同班級、不同課程的學生。其二，解決問題的能力有其複雜的發展過程，個別差異很大，其培訓乃屬於一個較長期的教學目標。相對而言，傳統個別單元知識的教學，則立竿見影。只消幾節課就能完成一個小範圍內的數學概念和方法，再加上操練式的習題，成果即時可見，這一點對師生雙方都很吸引。

但教授數學的問題解決技巧、策略，涉及的不單是個別學習單元的知識或者運算技巧，而是要發展一種思維方式、一種理路，同時還涉及培養對待數學問題的正面態度，因此成效至少也要一年半載才能稍見端倪。而且，這種教學成效也不單顯現在個別學生的數學解題表現上，還有課堂上就數學問題的討論方式、學生的參與、投入感、他們對數學的態度等，都可能有所轉變，也就是說數學學習文化上的轉變。因此要全面認真地評估這種教學方式的成效，本身就是一個大問題。可以說，以問題解決爲核心的數學教學，最終將帶來數學教育的轉型，既包括課程目標、重點上的轉移，以致學生在學習過程、成果上的不同表現，與及數學學習文化方面的轉變。

無可否認，要進行融入問題解決的數學教學，如同任何其他的改革，必然會碰上來自各方各面的阻力。教師在設計、推動這項改革時，需要對這些障礙有足夠估計。除了每所學校自身的特殊情況，有一點值得注意的，

就是新的小學數學課程目標、宗旨與大眾的數學觀未必一致，而且後者往往是過份保守、滯後的。當教師開始重視小學生的數學理解、思維發展、解題能力的培養時，也許不少學生家長仍篤信操練乃萬試萬靈之小學數學學習秘訣，仍著眼於學生的運算速度，仍執著以計算常規練習題的純熟程度作為學習成果指標。他們眼中的小學數學，與今天數學教育所談論的，其實已經有質的差異。學生家長是否願意接受小學數學科的重新界定？他們是否願意接納一套不同的評核數學學習成果的標準？他們又有否耐性等上至少一、兩年來看問題解決的數學教學的長遠果效呢？對這些問題，無論是計劃作初步嘗試的教師，又或是策劃大計、推動數學教學改革的教師，事先都必須有所認識、評估與對策。至於這「兩種數學」能否在學校教學中共生並存，魚與熊掌兼得，筆者其實是不太樂觀的。

面對教育改革，教師得明白自己角色上的限制，與及教育本身的複雜性。三十年前《紐約時報》(*New York Times*)有過一篇談及美國六十年代教育改革的失敗，作者 Kristol 的說話今天讀起來再明白不過，但看來卻又不容易令人接受，謹節錄於此作結。

There are some who will say that this state of affairs merely shows how obstinately conservative our “educational establishment” is. I think this misses the point. ... [W]e are dealing with a network of human relationships that does satisfy, if only in a minimal way, certain basic societal needs, even if we don’t quite know why or how it does. ... “We can go to the moon, can’t we? Well, why can’t we do something equally marvelous about the ghettos or education or whatever?” The answer is, of course, that going to the moon is easy whereas improving our system of education is hard. The one is nothing but a technological problem, the other is everything but a technological problem. Doing something about education means doing something about people – teachers, students, parents, politicians – and people are just not that manipulable. They are what they are and do not become new people to suit any new ideas we might have. <sup>[11]</sup>

註釋：

- [1] 本文的較早版本曾以〈關於如何教授解決數學問題的幾點意見〉為題刊登於啓思小學課程發展小組編印之《學與教》第三期（2002 – 2003）。為著能與更多小學數學老師分享這些想法，現經修訂刊登於《數學教育》，文中個別觀點亦有修訂。並感謝盧錦雄、謝瑞華、黃毅英分享寶貴意見與感想。
- [2] 新實施的中小學數學課程內容詳見：  
香港課程發展議會（2000）。《數學教育學習領域：數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。  
香港課程發展議會（2000）。《中學課程綱要—數學科》。香港：教育署。
- [3] 香港課程發展議會（2002）。《數學教育：學習領域課程指引（小一至中三）》。香港：教育署。
- [4] 見該書前言。
- [5] 李士錡（1996）。熟能生巧嗎。《數學教育學報》，第5卷，第3期，頁46 – 50。  
李士錡（1999）。熟能生笨嗎？——再談“熟能生巧”問題。《數學教育學報》，第8卷，第3期，頁15 – 18。  
李士錡（2000）。熟能生厭嗎——三談熟能生巧問題。《數學教育學報》，第9卷，第1期，頁23 – 27。
- [6] 這裡嘗試列舉一些容易找到的：  
劉應泉（主編）（1995）。《數學家族》（第1至4冊）。香港：香港教育圖書公司。  
黃文選、劉夢湘（主編）（1997）。《小學數學應用題：解題思路訓練》。台北市：九章出版社。  
戴再平（主編）（2000）。《小學數學開放題集》（上、下冊）。上海：上海教育出版社。
- [7] Wong, N.Y., Marton, F., Wong, K.M., & Lam, C.C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 25 – 47.
- [8] 戴再平（主編）（2002）。《開放題——數學教學的新模式》。上海：上海教育出版社。  
Becker, J.P., & Shimada, S. (Eds.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [9] Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114 – 145.
- [10] Kroll, D.L., & Miller, T. (1993). Insights from research on mathematical problem solving in the middle grades. In D.T. Owens, & S. Wagner (Eds.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 58 – 77). New York: Macmillan.
- [11] 原文乃 Kristol, I. Some second thoughts. *New York Times*, 8 January 1973, pp. 55; 62. 本段則節錄自 Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 22 – 29. 中之引文（頁28）。為免筆者譯文使作者原話失色，此處照錄英文原文。至於香港近年教育改革類似種種，請參閱：蔡寶瓊、黃家鳴（編）（2002）《姨媽姑爹論盡教改》。香港：進一步多媒體有限公司。  
(URL: [http://www.stepforwardmultimedia.com/product/book\\_detail.asp?isbn=962-8326-47-3](http://www.stepforwardmultimedia.com/product/book_detail.asp?isbn=962-8326-47-3))