

現代數學與小學數學

王幼軍

上海師範大學教育科學學院初等教育系

洪豔

上海市閔行區中心小學

隨著我國小學教育的發展，小學教師的水平也將不斷提高，一個高水準的小學教師應具有多方面的素質，其中，「具備較高的現代數學修養應成爲二十一世紀的小學數學教師基本素質之一」已成爲人們普遍認可的一種觀點。小學數學教師的現代數學修養包括哪些方面就成爲人們關注的問題。在對於這個問題的討論中，有一點可以達成共識，也就是小學教師必須具有寬廣紮實的數學知識。這裏所說的數學知識不僅包含小學數學內容，也包含與小學數學有關的現代數學知識。任何知識只有用較高的觀點來透視，才能看清其本質。「居高臨下」地看待小學數學是師範生學習高等數學的主要目的所在，因爲站在高等數學知識的平臺上，數學教師才能夠胸有成竹、遊刃有餘地審視小學數學。

然而，有一個問題是「居高」怎樣「臨下」？對於小學數學教師來說，懂得現代數學是重要的，更進一步能夠用現代數學的觀點分析和處理的小學數學更爲重要。所以討論小學數學教師的現代數學修養，必須解決好另外一個問題：怎樣從現代數學的角度來理解小學數學？也就是怎樣溝通現代數學與小學數學之間的內在聯繫。本文中，我們將從現代數學的三個主要方面來討論這一問題。

一、現實數學觀點下的小學數學

「現實數學」這個概念的含義非常廣泛，其中最主要的體現在三個方面：一方面體現在數學發展過程中。整個數學體系是一個充滿著各種各樣內在聯繫和外部關係的整體結構，它不是一個僵硬的、靜止的骨架，它是在與現實世界的各個領域的密切聯繫過程中形成並發展起來。例如幾何起源於土地測量，比例起源於分配，線性函數起始於自然和社會中的比例關

係，導數開始於速度、密度、加速度等。從數學史中可以清楚地看到，大多數的數學概念、運算和規則都是由於現實世界的實際需要而形成的，數學是現實世界的抽象反映和人類經驗的總結。數學的現實意義的另一方面則表現在數學應用的廣泛性，數學已經深入到當今社會的每一個領域，不管多麼抽象的數學，它在自然界最終能得到實際的應用。例如，曾被人們認為毫無使用價值的數論竟與國家的安全發生了聯繫，質數的性質成了編制一種新密碼的基礎，像其他的最抽象的數學分支——幾何、邏輯等也都有非常重要的實際意義。最後，數學物件的客觀性是現實數學的另一表現形式。數學的客觀性是說數學知識和物件是自主存在的，而與任何個體的主觀知識無關。初等數學知識的客觀性最明確的體現是許多初等數學術語和概念是描述現實世界的語言的一部分，比如「10」、「直線」、「角度」、「三角形」等術語刻畫了現實世界中物件或物件集合的性質。而另一些如「加」、「除」等則描述了作用於具體物件的動作。這些術語名稱通過它們在客觀現實中的具體對應而獲得了「客觀性」。從而為「現實數學」提供了實在的基礎。因此說，數學是現實的數學，它的過去、現在和未來都屬於客觀世界，屬於社會。大多數小學數學知識都產生於數學發展的早期，而早期的數學的特點是經驗的和現實的；此外，小學數學也是在各方面應用最廣泛的數學基礎知識。作為整個數學最初級、最基本的小學數學的現實意義尤其具體，幾乎每一個符號、概念和法則都有具體的現實模型，它是最現實的數學。

但是，對於數學事實的現實意義的理解並非是統一的、一成不變的，對它的理解可以因人而異，也可以因時而異。例如，在記數系統內，基數這個概念，古埃及人把它理解為踵骨、花朵等具體物體的多少，中國人則理解為算籌的多少，而巴比倫人則對基數的解釋依賴於對於基底和位置制概念的理解。對於每一個人來講，由於每個人所經驗的客觀現實不同，那麼他們從中所獲得的數學經驗、數學知識以及關於這些知識的結構有所不同，這就造成了每個人對於數學的現實意義的理解的不同。例如，對於小學低年級的學生來說，數「5」並不是一個獨立地存在，只當用「5」描述一個東西時，「5」才有意義；如5隻手指、5枝筆等，「5」是一個形容詞而不是一個名詞。同樣，當他們初學加法和減法時，也並不把它們看作抽象的數學運算，只是把具體的外部意義賦予他們：加法是指放在一起或增

加，減法是指拿走或減少。而小學高年級的學生對於數和運算的理解就有差別，他們已經意識到 5 個蘋果、5 隻手指 …… 等 5 個實物的共性，從中逐漸抽象形成一個獨立的概念 5。這種理解的不同也導致了學生解決問題的思路和過程的差異。因此，教師應瞭解每一個學生在每一個階段的理解程度，並由此出發組織教學。

如果把整個數學形容為一棵大樹，那麼這棵大樹的根基深深地紮根於現實世界中，這種根基也是每一個人數學成長必要的一步。教師對其有深刻的理解是引導學生自然地實現由具體向抽象數學的轉化、進入更高層次的數學境地的必要條件。因此，小學數學教育應該是現實數學的教育，它應該源於現實、寓於現實、用於現實。教師在教學中要時刻以這種思想作為出發點，而不只是附帶的「聯繫一下實際」。應該通過具體的問題來教抽象的數學內容，從學習者所經歷、所接觸的客觀實際中提出問題，然後昇華為數學概念、運演算法則或數學思想觀念；不僅講授數學知識的內部聯繫，而且更要強調自然的數學的外部聯繫。只有這樣，才能使學生明白如何從現實中提出問題和解決問題，以及如何將所學知識更好地應用於現實。

二、演算法觀點下的小學數學

演算法 (Algorithm) 這個詞是由阿拉伯數學家阿爾·花拉子米的名子 Al-Khowarizme 轉化而來的，其原意為用阿拉伯數字進行計算的過程。時至今日，這個字的含義更加豐富，現在所謂演算法是指求解一類問題的機械的、統一的方法，它由有限多個步驟組成，對於問題類中的每一個具體問題，機械地執行這些步驟就可以得到解答。某些有固定步驟的計算方法，如四則運算、開方、乘方、因式分解、解方程、解不等式等都是特殊的演算法。當計算的步驟變得越來越機械時，數學的外部意義就消失了，最終完全由完美的法則來操縱數和符號的運算過程和結果。演算法的這些特徵使得計算不僅可以由人來完成，而且可以由電腦或計算器來完成。從這一點來看，目前小學數學內容的絕大部分都可以表示成演算法的形式。

在數學發展的歷史上，演算法曾經發揮了巨大的威力，我國古代數學的代表作《九章算術》、韋達的代數、笛卡兒的解析幾何、萊布尼茲的微積分等，都是這方面的出色成果。演算法數學的確有其迷人之處，通過演算法的操作往往可以增加人們的自信與能力。但是，如果只是墨守成規地機

械操作，會使人們的思想受到束縛，必須跳出這個圈子，才能在數學上有所拓廣深入，集合論的誕生、公理系統的建立、布林巴基學派的出現都說明瞭這一點。曾經有一時期，演算法受到冷落，但是，從本世紀四十年代開始，隨著電腦的產生和發展，演算法數學卻空前地發揮其威力，因為它是電腦的運作語言，由此也引起了演算法含義的改變，演算法從緩慢的、清楚且容易理解的形式向迅速的、更機械化的形式進化。

歷史上對於演算法的這兩個方面認識反映在當今的數學教育中，也是經常使人感到困惑的問題之一。一方面，由於電腦與演算法的關係，演算法數學格外受到重視，這就需要教師對演算法數學有更深刻的理解；例如，一個演算法的操作原理是什麼？像為什麼一個數乘以 100 就是「添兩個零」？一種運算可以有幾種演算法？對於具體問題哪一種演算法是最好的？對於不同的記數系統（像二進位記數系統）中的演算法又如何進行？一個演算法對於以後學習哪一部分數學有用？等等；另一方面，由於電腦和計算器的推廣普及，數學中的許多演算法都可以由電腦完成，在這種情況下，怎樣處理以演算法為主的小學數學？是強調理解，還是著重運算和操作？哪些內容應該加強？哪些內容應該拋棄或保留等等。這些都是當今每一位教師所應思考的問題。

三、數學系統觀點下的小學數學

從現代抽象的觀點來看，純數學研究的物件就是各種各樣的系統或結構。那麼什麼是數學系統（mathematical system）？對於這個概念可以有多種不同層次的解釋，最簡單直觀的解釋是：一個數學系統是一個含有一個或多個二元運算的集合，即是一個「有組織的集合」，如集合 S 上若有一個運算 \oplus ，則 S 就是一個數學系統，記為 $\{S, \oplus\}$ 。若 S 上有兩個運算 \oplus 和 \otimes ，則記為 $\{S, \oplus, \otimes\}$ 等。 S 中有未加定義的基本元素，這些基本元素可以解釋為「數」或「點」，也可以是任何的「抽象的東西」。對於 S 上的二元運算（Binary operation）的定義只須遵守某些基本的規則，最基本的一條是封閉律（Closure），即運算的結果仍然是集合 S 中的一個元素。所以說集合 S 上的一個二元運算就是從 $S \times S$ 到 S 的一個函數，最常用的二元運算是加法 \oplus 和乘法 \otimes 。它們與普通的加法和乘法有某些相似的地方，但在不同的場合，對它們的解釋與普通的加法和乘法很不一樣。舉例說明：

假設集合 $\{0, 1, 2\}$ ，用 B 表示。它上面的加法 $+$ 和乘法 \times 分別用下表定義：

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

表 一

\times	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

表 二

表一是基於模 3 (modulo 3) 的加法，這種加法常被稱為「時鐘加法」。只不過普通的時鐘以 12 為模。類似 $\{B, +, \times\}$ 的數學系統通常被稱為「時鐘算術」。

數學系統的研究方法主要是抽象的公理化的方法，從教學實用的角度來說這種觀點或許不如前兩種實用，因為關於數學系統的大多數內容是不能直接展示給中小學生的，在「新數學」運動中，因為過早地把這種抽象的觀點引入中小學數學得到了慘痛的後果。歷史的教訓不能忘記，我們不能忽略中學生的認知發展水平。然而這種方法畢竟是數學的最本質的方法，實際上無論是中學還是小學數學，從教材知識的編排到具體內容的展開都不可能完全擺脫這種思想。中小學數學體系是各種不同的、擴大的、不甚嚴格的公理系統。例如，可以這樣理解小學數學中的非負整數系統：直觀的物件元素的集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ，加法和乘法是其中的兩種基本運算，封閉律，交換律，結合律，分配律，單位元的性質 (properties of identity element) 甚至九九乘法口訣等作為默認的公理。這樣理解可

以把看起來紛亂無序的小學數學置於一個清晰、完整的系統之中，有助於教師更透徹地理解具體的知識和概念，例如數、運算、長度、面積、體積、方程、函數等。

總之，用數學系統的觀點審視小學數學可以使教師體會到現代數學系統豐富多采和簡潔性的特點。例如，由於在不同基的記數系統之間存在著同構的關係，因此，可以把它們看作對同一個數學系統的不同解釋。用數學系統的觀點理解小學數學也是感受人類卓越的精神力量、體會數學的本質意義和數學的魅力的一種最有力的方法，從而增加自己對數學的興趣和熱情。數學系統的觀點還可以使教師在更高的層次上把握自己所教的學科，在教學中增加自己專業能力的信心並克服對學生提出來的一些意外問題的恐懼心理，避免由於這種不安全感所滋生的教學思想和方法的僵化，從而對學生的提問給予建設性的回答，真正做到居高臨下地審視小學數學。

在本文中，我們從理論上探討了怎樣用現代數學的觀點來理解小學數學的問題。然而，我們知道讓小學數學教師理解並掌握上述觀點僅通過一篇文章是遠遠不夠的，怎樣將理念付諸於實際是更為關鍵的步驟。我們設想：在培養小學師資的師範院校開設一門有關的課程不失為一個有效的途徑。這門課可以叫做「小學數學研究」或者「現代小學數學」，它是獨立於「小學數學教育學」的，也不同于純粹的數學基礎課，其宗旨是架起一座現代數學與小學數學之間聯繫的橋樑。這門課的開設無疑需要有較高的現代數學知識作基礎，目前，在我國的許多發達地區已經開始招收四年制本科高學歷的小學教師，這就在客觀上為上述設想的實施提供了條件。

主要參考文獻：

1. 張奠宙，鄒一心，現代數學與中學數學，上海：上海教育出版社，1991
2. Krause, Eugene F.; Mathematics for Elementary Teachers; Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1998
3. 張奠宙，唐瑞芬，劉鴻坤，數學教育學，南昌：江西教育出版社，1991
4. 21世紀中國數學教育展望課題組，21世紀中國數學教育展望，北京：北京師範大學出版社，1993