

探討數學教育上的另類思維

鄧幹明
香港浸會大學

一、引言

二零零一年六月香港課程發展議會就香港未來十年的課程發展釐訂了新路向，發表了名為《學會學習：終身學習、全人發展》的報告書。當中就學校課程架構方面，建議現有科目編入為八個學習領域，把以往在目標為本課程所強調的五種能力擴展至九種共通能力，另加強價值觀和態度的培育。凡此種種的定位，目的都希望達致廿一世紀香港教育的目標，亦即是上述報告書的標題願景。

然而，就上述課程架構的新意念中，各種共通能力、價值觀和態度的培育都建基於學習者個人思維的發展水平上，本文嘗試以數學教育為例，探討學校應如何發展學生的思維，以便他們能夠有效地獲取各種共通能力，以及培養正確的價值觀和態度。

二、數學教學上的缺失

A. 課程方面：

自從課程改革開始，課程發展議會指出以學校為本位的課程發展的重要性，各學校可以因應各自的辦學宗旨、有利的條件、可運用的資源、學生的興趣、能力和需要等，在新的課程架構之下，開展校本課程的工程，希望給予每所學校較大的自由度和彈性處理過往以中央為本的課程設計。然而，筆者恐怕以現時的教學環境、教師的有關知識和能力、教育當局所提供的配套措施，相信短期內很難確認校本課程的成效。換言之，筆者有理由相信大部分的學校可能是換湯不換藥，又或者採取觀望的態度，實行以靜制動，仍然以傳統的模式運作。例如以教科書為主導的課堂教學，教師的任務可能仍是把教科書的內容全部傾囊相授便算大功告成，即所謂「教了等於學了！」

就學習數學而言，以上的情況往往引致學生只側重運算方面的技巧和速度，他們的心智活動只是局限於把資料輸入（從問題提供的數字），然後在記憶系統內搜尋有關的程序性知識（Procedural Knowledge）來解答便

作罷。教師方面亦只關注學生的答案是否正確；由於課程內容的緊密編排，教師亦絕少提供機會，讓學生討論和分享各自的思路歷程。所以，縱使學生有任何錯誤的思維或概念，教師都很難單憑答案的正確與否便何以作出判斷；而正確的思維和概念卻往往比求得正確的答案來得更為重要，對學生的學習，特別是後期的學習更具深遠的影響，這點卻正是我們長期所忽略的。

B. 學習觀念方面

香港的教育一向都是以考試為主導，學校課堂的教學一般都是以填鴨式進行；在篩選、競爭和擇優的大前提下，學校縱使明白「教了並不等於學了」，亦要被迫接受這個事實。因此，由小學至中學的學習階段，學校教育均極少能夠提供空間和學習機會予學生去真正進行思考活動，更遑論正式的思維訓練。

同時，一般家長的心態都認為只要分數高、成績好、名次前列便心滿意足，對於子女於學習上實質的得著都掉以輕心。例如數學學習上，家長往往覺得多操練是獲取高分數的不二法門！但卻忽視練習的質素是否有不妥善之處；須知道一個對學習有幫助的練習應同時兼顧量和質兩方面呢！前者可鞏固學生的學習，後者卻可以培養學生思維方面的發展；過份偏重前者只會帶來壓惡感，更甚者可能形成機械式的條件反射，使學生的思維受到阻礙，未能靈活變通，遇到陌生的問題時不懂如何解決，而能夠解決不熟悉的問題正是學生須具備的能力呢！

總括來說，數學教育的其中一個目標應該是培養學生的思維能力，這種能力不僅規限於數學學習和應用上，並希望能夠轉移到其他方面，例如作為掌握九種共通能力的基礎等。

作為數學教育工作者，我們便有責任把思維訓練加入平時的教學中；然而，若我們對思考的法則完全沒有任何概念或有所忽視，深信對我們的教學成效和學生的得著定必大打折扣，亦難培養學生的思維能力，間接影響學生建立共通能力的基礎。所以，筆者嘗試引用李天命 (1999) 主張的四個思考方法原則於數學教學上，希望能引起數學教師的關注，從而在日常的教學活動中，多提供機會予學生正確地運用思維去解決問題。

三、思考方法的原則於數學教學的運用

根據李天命 (1999) 的意見，思考方法的原則有四項，包括 (a) 語理分析；(b) 邏輯方法；(c) 科學方法；及 (d) 謬誤剖析。教師若能培養學生具備上述四項原則的思考方法，深信對學生掌握任何概念和能力都大有裨益。詳情分述如下：

(a) 語理分析是要釐清問題、思想或概念。

許多時候，當學生面對數學上一般的例行題時，往往不加思索便根據題目提供的數字立即列式作答，對於問題的文字描述極少關注。教師方面同樣不太重視問題的陳述有沒有需要釐清的地方。試以下列三個例子說明。

例一：有糖 80 粒，平均分給 6 位學童，每人可得多少粒？
餘下多少粒？

例二：把 5 張面值一千元的紙幣分給兩兄弟，問每人各得多少元？

例三：每輛的士可載五名乘客，現有 32 人在輪候的士，問共需的士多少輛？

以上三個例子，學生基本上很快便會計出答案，但若我們進行語理分析，除例一外，其餘的均有商榷餘地。例二中，問題並未有交代如何分配，是平均分配（如例一）還是有不同比重的分法呢？就算我們已習慣了是平均分配，但仍存在需要釐清的地方：難到要把其中一張紙幣剪開一半嗎？例三中，學生受到該題型運算的制約，往往忽略現實情景的條件（正常情況下，我們豈會與陌生人同乘一的士呢？）。所以作為教師，我們應時刻提醒學生釐清問題的必要性，即是語理上是否有含糊的地方需要弄清楚。平時教學中，教師應盡量利用變式練習，避免學生受到某類型題目的條件反射所帶來的負面影響。

(b) 邏輯方法的作用是審核論證是否正確，而當中常以演繹推理 (Deduction) 作為審核的工具。

根據黃慧英等 (1994) 的調查顯示，受測試的現職或未來的中學教師的演繹推理能力都遜於非演繹推理能力，並提出邏輯訓練是提高推理能力的有效途徑。楊熾均 (1994) 亦指出學生作文常犯的錯誤中，包括推理不合邏輯，例如推斷無據，以偏概全和理由欠充足等，因而強調邏輯訓練對學生寫作的重要性。

就數學而言，學生在幾何學習上，最能體現邏輯推理的訓練。可惜隨著數學課程的改革，新的課程內容上，對用演繹推理來學習幾何所佔的比重愈見減少，所以筆者恐怕學生能夠接受邏輯思維訓練的機會進一步削弱。

然而，對一般具常識性質的邏輯考慮，筆者認為仍可在數學學習上加以重視。現以下述一道例題說明：

例四：媽媽買布 6425 米，給姊姊做裙子一條用去 2136 米，
給爸爸做西裝一套用去 1254 米，問還有布多少米？

很明顯，這是一道四位數加、減法的應用題，一般程度的學生都應該不難算出答案；但若仔細留意題意，則頗令人啼笑皆非！因為所提供的長度絕對不合理。若教師能把握機會，與學生一起討論當中出現不合邏輯的地方，相信這道題就會變成蠻有意思。另一方面，亦可以藉此機會測試學生對單位長度的實質認知程度，即對「一米」到底有多長的概念。例如，教師可以提問 6425 米大約等如多少層樓的高度，這時候，學生便可以有機會體會問題不合邏輯之處。另外教師亦可以要求學生如何把該問題合理化，增加學生動動腦筋的機會。

另一方面，邏輯推理的訓練對於一些衝動型認知方式的學生尤其重要，因為此等類型的學生往往急於求解而忽略問題的細節而出錯，但他們的錯誤並非反映他們的能力較低，正如周潤民 (1990) 的研究顯示，衝動型的兒童會因應情景的要求（如測驗、考試）而有急於給出答案的傾向。所以周潤民建議教師應隨時多提醒他們，讓他們自主地支配時間，鼓勵他們注重問題的準確性，而非急於給出答案。對於喜歡採用比賽形式以求增加課堂學習氣氛的教師，這方面尤值得我們關注，以免失卻學習的最終目的。

(c) 科學方法旨在提供一套可藉獲取或判辨經驗知識的程序，亦即是探索科學學問等所慣用的「假設——檢驗」的過程。

用於數學學習上，筆者認為以下兩種類型的數學內容或多或少均帶有相似的探索性質。第一是運用方程式解難。

例五：甲、乙兩人共有 10 元，若甲比乙少 1 元，求各有多少元？

若以上述的探索過程求解，學生可以假設甲有 x 元，則乙有 $(x+1)$ 元，然後解所列方程便得知答案，最後驗證得出的解是否合乎題目給出的條件。再者，對於未曾學習方程式解難的學生而言，上述求解的過程仍然可以採用，當中涉及學生的推理思考更值得教師多加培育。例如著學生思考若甲有五元（假設），則乙有五元（ $10 - 5$ ），兩者相同，所以不符題意（檢驗）；若甲有四元，則乙有六元（ $10 - 4$ ），甲比乙少二元，仍不符題意（檢驗）；若甲有三元，則乙有七元，甲比乙少三元，愈見不符題意！這時候，學生應該假設甲有多少元便是關鍵所在，而學生是否能夠正確地說出背後原因，則反映學生判辨能力的水平。

第二是幾何證明的問題上，能夠成功解難的其中一個重要因素便是學生能否採用「假設——檢驗」的探索過程。

例六：已知一個三角形的邊長分別是三厘米、四厘米和五厘米，試證明這三角形是一個直角三角形。

求證的探索過程中，假設那三角形是直角三角形的話，那麼，根據畢氏定理，三條邊的長度便有一固定關係，學生若能根據所給的長度，檢驗它們有否該固定關係便可得知結果；換言之，若我們能計算出 5 的二次方是等如 3 的二次方及 4 的二次方之和，便得出證明。當然，上述只是思路的歷程，學生尚需要以文字形式有系統地把證明的過程表達出來。

「假設——檢驗」過程中的核心問題是學生能否獨自思索出把甚麼關鍵的地方置於假設上作為探索的起步點，若學生未具備此等能力，教師應該如何介入協助便是反映教師的專業知識和技能。最重要的信念是以啓發式的策略，即提出一些有方向感、具啓示作用的問題，要求學生思考當中的答案，一步一步地引領學生得出答案為止。正如張慶林等 (1997) 的研究

顯示，啓發式的策略是假設檢驗中的重要策略，它能有效地限制搜索方向，防止盲目使用嘗試錯誤 (Trial and Error) 的策略。

(d) 謬誤剖析是將通常碰到的錯誤思維方式加以界定和歸類，倘若遇到時，能夠指認出來，加以糾正。

數學教學上，學生往往受到教材的編排、教師的教學法和要求等因素，對學習數學所使用的思維有著一定的影響。最常見的想法是任何數學難題必有解，而且是唯一的！

例七： 船上有綿羊 26 隻，山羊 10 隻，求船長的年齡。

理論上這道題是不能找出答案的，但由於學生從未遇過解不到的問題（極其量是自己出錯而已），所以對於例七的問題，他們仍可以把答案合理地說出來！例如把兩數相乘的積過大；兩數相減的差過小；所以把兩數相加的和最合理！

再者，學生解題時，往往只是針對一些關鍵字便立即把答案算出來，例如：凡問題出現「共有」兩字，學生便斷定必然是以加法或乘法求解；出現「餘下」時便以減法或除法去找答案。但試看以下二道例題：

例八： 三個不同高度的架子疊起時高 180 厘米，把最頂 80 厘米的一個移去後，問其餘兩個共高多少厘米？

例九： 陳老師買了 12 打鉛筆作獎品，第一次用了 10 枝後，問還餘下多少枝？

遇到以上兩個例子，若學生採用上述的錯誤想法，那麼，正確答案的討論必定會令他們從新認識「關鍵字」的作用。教師方面亦應該反思日常教學中，有否刻意或無意之中強化了學生於解題時的一些錯誤思維。事實上，我們更應該提高警覺，避免製造任何機會令學生形成錯誤思維。最佳的做法是不應該只重視問題的答案正確與否，還應該讓學生有機會互相討論各自的解題思路歷程，而教師不妨多花心思設計一些足以打破錯誤思維的題目給學生討論，使學生的思維變得靈活和敏捷。

此外，教師可以在課堂中盡量利用有變化的練習；對於某一知識，既注意一般情況下的結論，又注意特殊情況下的相應結論的變化和聯繫（徐

克立等，1996）。例如長方形面積和正方形面積的關係、長方形面積和平行四邊形面積的關係以及平行四邊形面積和三角形面積的關係等，而並非只是要求學生強記各規則圖形面積的公式。

總括而言，若教師們能把數學教學的工作重點重新定位，集中以學生為本位的學習上，轉變以往只求純知識概念的灌輸、只重視運算程序（Algorithm）的操練，而注入培養學生另類的思維能力於教學上：即語理分析、演繹方法、科學方法和謬誤剖析等四種思考方法的原則，那麼，筆者深信對學生的學習成效必定有所增進，亦能符合現今課改的大方向。

四、結語

「學而不思則罔，思而不學則殆。」（論語：為政），可見學習和思考同樣重要，兩者不可或缺，否則有礙學生的認知發展。面對廿一世紀的挑戰、社會經濟的轉型、科技一日千里的創新、知識的日新月異，學校教育的目標已不能夠單從純知識方面著墨；相反，訓練學生學會學習、培養學生具備獨立思考能力等將有助我們的未來主人翁更能適應社會的需要，才有望他們對社會作出貢獻。

作為數學教育工作者，通過數學教學去培養學生的思考能力，實在責無旁貸。而本文所論述的內容，亦非甚高深莫測的大理論，筆者只希望通過一些簡單的示例，從中引發數學教師對思維訓練的關注，並能夠於日常教學中注入有關元素，共同努力地朝著課改的新路向進發。

參考書目：

- 李天命（1999）。《李天命的思考藝術》。香港：明報出版社。
- 周潤民（1990）。衝動型和思索型認知方式在兒童邏輯推理中的中介作用。《心理學報》，第四期，頁 355 – 361。
- 香港課程發展議會（2001）。《學會學習：終身學習、全人發展》。香港：香港教育署。
- 徐克立、楊亮明、萬源宗、楚鳳仙、王群、陳光祥（1996）。數學自學輔導教學與常規教學對於培養學生獨立思考能力比較研究。《教育研究》，第三期，頁 69 – 73。
- 黃慧英、譚家雄、方子華（1994）。香港學位教師的邏輯思維。《香港中文大學教育學報》，第廿二卷二期，頁 255 – 265。
- 楊熾均（1994）。邏輯思維與寫作教學。《香港中文大學教育學報》，第廿二卷二期，頁 345 – 353。
- 張慶林、王永明、張仲明（1997）。假設檢驗思維過程中的啟發式策略研究。《心理學報》，第廿九卷一期，頁 29 – 35。