重視解題數學中的悟性培養

傅海倫

山東師範大學數學系

眾所周知，數學解題在數學學習、教學和數學研究中都佔有重要的地位。數學教學的重要目的之一，就是培養學生分析和解決問題的能力。但學生解題能力的提高，不僅要求學生具有嚴密的邏輯推理能力、縝密的思維素質，快捷而準確的運算技能、技巧，而且要求學生具有一定的洞察、感悟能力，對於面臨的問題情境，不僅可感悟出數學語言、符號所包含的豐富內涵，還應該真切地感悟出數學思想、方法之道，並洞察出解決問題的思路或途徑。

長期以來，解題數學中一方面雖然培養了學生的邏輯推理能力、運算的技能技巧甚至達到了追求解法的「多」、「變」、「奇」的程度；另一方面，卻忽視了學生觀察、想像和感悟能力的培養。

感於此，本文所謂的悟性培養，即指這樣一種教學原則：教師在組織解題數學活動中，充分運用「導」的藝術，創設一種契機和氛圍，引導學生在充份理解題意的基礎上，深切感悟其中豐富的內涵，將各種信息作整體考察，綜合分析，作出直覺想像和判斷，從而達到對數學對象的本質及內在規律的認識，頓悟出解題的思路和方法。

一、　解題數學中的悟性特徵

解題數學中的悟性既是解題中頓悟的決竅，也是領悟創造的源泉，其基本特徵表現在以下幾個方面：

1. 感悟性

解題教學中，學生是解題的主體，命題本身是解題的客體。對主體而言，感知是解題的基礎，理解是解題的核心，解題的效果取決於理解的深度、廣度，理解的水平則取決於感知的深廣程度。解題主體只有充份感受、知覺解題客體的整體，把握命題中的關鍵詞、數學語言、符號和圖象，才能達到理解，發掘出數學對象的本質規律，提高感悟能力的目的。例如，對表達式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 的掌握，應舉出不同形式的例子，從次數、系數等進行變式，改變其非本質屬性而保留其本質屬性：

$$(\square^n)^2-(\blacksquare^n)^2=[(\square^n)+(\blacksquare^n)][(\square^n)-(\blacksquare^n)]$$

即指數不限於二次，可以是其他偶次，a, b 系數也不限於 1 等等。隨著對公式的逐步理解，悟性蘊在其中。

2. 多維性

解題客體的知識內容是相對固定了的有限變量，而課題主體卻是活動的無限變量，解題過程是一種能動的心智活動過程，在此過程中，主體的知識背景、思維特點、經驗、心態諸方面的差別，必然會導致對同一解題客體的不同的理解和感受。因此，在解題數學中，我們當然不能過份強調統一和均衡，而忘記了對主體知識的多角度引導、多方位開發。忽略解題的多維性，勢必會在無形中扼殺學生的解題個性，阻礙學生思維的全面發展。

3. 能動性

任何學習效果的優劣，在很大程度上取決於學習主體對客體的自覺能動性的發揮程度。就數學解題而言，學生如果沒有解題的動機是難以達到良

好解題效果的。在數學中常有這樣一種現象，學生并不滿足教師提供的解法和固定的模式，而是獨立鑽研、獨闢蹊徑，這種解題動機已包含在學生的自由選擇和深切感悟之中。方法和手段是靠自己「悟」出的，需要什麼、如何處理，盡可按自己的思路而展開，無需教師硬性規定便可自覺涉獵，因而是能動的，而不是靠教師的灌輸被動接受的。

4. 創造性

解題過程中，離不開想象、聯想、數學美感和歸納、類比等思維方法，解題中的悟性常依靠形象、直覺、靈感和數學美感迅速作出估斷，以達到對本質特徵的領悟與突破，解題過程中的形象和表徵是借助於數學語言、符號、數學表達式等形象的指示和加工改造，才能轉化爲自己頭腦中的數學新形象，以獲得直接的感受和領悟，這種構造新形象的過程本身就是一種創造。一般來說，知識、經驗越多，想像力越豐富，化歸意識越強，解題悟性就越高，實現數學創造的可能性也就越大。

二、　解題教學悟性培養的基本手段

根據以上分析的解題悟性的特點，結合數學教學尤其是當前解題教學的實際，培養學生的解題悟性應著重從以下幾個方面入手：

1. 培養解題個性心理，營造解題感悟的氛圍

濃厚的興趣、高度的注意、飽滿的熱情是學習數學悟性形成的主觀心理的基本條件。德國教育家第斯多惠說：「教育的藝術不在於傳播的本領，而在於激勵、喚醒、鼓舞。」教師可通過提問設疑、創設適宜的問題情境等手段和方法，激起學生學習的心向，便爲學生主動積極地思考提供了一個良好契機和氛圍，強烈的期待心理能促使學生自覺地進入最佳的解題心理狀態，這是悟性形成的激發點和催化劑。有經驗的教師就善於利用問題

設疑來鼓勵、激發學生，點燃其智慧的火花，從而培養學生的解題悟性。比如已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 8$, $f(-2)=10$, 求 $f(2)$。學生常採用常規思路，由已知條件確定再代入求解，這樣勢必事倍功半，如果教師激趣設疑，引導學生通過觀察題目特點考察函數 $f(x) - 8 = x^5 + ax^3 + bx$ 的性質，點燃由已知到未知的「導火線」，學生頓時大徹大悟，茅塞頓開，從而獲得新穎獨特的解法：令 $g(x) = x^5 + ax^3 + bx$ 則 $f(x) = g(x)+8$, 且 $g(x)$為奇函數，由 $f(-2)=10$, 很快求得 $f(2)=6$.

2. 淡化目標，創設主動解題的條件

任何活動都應有明確的目標，這是毋庸置疑的。解題教學，教師當然首先要有一定階段或一定梯度的目標意識，適時給學生提出解題目標及訓練要求，有利於學生思維能力發展的協調性、統一性和方法訓練的系統性，但要充份發揮學生的主觀能動性，尊重學生的個體差異，在解題教學中培養不同學生的個性，施教過程中淡化目標又是必要的。如果教師目標太強、太死，甚至把每道題中所要掌握的和識點和所要訓練的能力點都毫不隱晦的告訴給學生，勢必引起學生的逆反心理，扼殺學生的解題個性和思維的積極性、靈活性、創造性。淡化解題目標，由學生從自己的興趣入手，逐步引導，把被動解題變爲主動解題，再把教學目標在學生的興趣點上「潛移默化」，當學生的主觀願望與解題要求相互碰撞時，教學目標就會自然而然地被激活起來。

3. 教學協同，師生共創解題感悟的空間

學生的悟性培養，是在教學的雙邊活動中進行的，是教師主導和學生主體相互作用、相互協同的結果。因此，教學中要安排一定的感悟階段，給學生留下直覺感悟的空間。教師要讓學生解題有所悟，就得保証他們自我解題感悟的機會，對於疑難所在，或拋磚引玉，或巧設提示，使他們悟有

所得，但均應以含而不露、引而不發爲準則，切勿把現成答案或固定解法合盤托出，教師應始終保持良好的解題氛圍，把想像的空間、回味的餘地留給學生。教師適時引導、啓發、點撥，使之茅塞頓開，深思在教師指導下的嘗試活動，這是悟性產生的土壤，在探索活動中，圍繞疑難，教師可提出有關的「邊緣」問題或過渡性問題，逐步導入而接近問題的核心，而對一般人腦中的常歸思路和解法，可採用歸納、類比、聯想的方法，注意在新問題特定場合下加以審視，使之悟出原型思維的利與弊，從而打破常規，自覺走出思維定勢的誤區，拓廣思維空間，創造出新穎獨特的解法。例如對於球體積公式：

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}(4\pi R^2)(R) = \frac{1}{3}S_{球}R$$

(其中R、$S_{球}$、$V_{球}$分別表示球的半徑、球的表面積、球的體積)。變形所得結果啓迪學生的思維：$V_{球}=\frac{1}{3}S_{球}R$，居然和錐體體積公式 $V_{錐}=\frac{1}{3}Sh$ 如此相仿！這難道是偶然的巧合嗎？不，它恰恰反映出數學公式之間的內在聯系與和諧統一美的特徵。學生據此作出進一步的探索：只要以 R 爲「高」，S 球爲「底」，球心爲「頂點」，球就可以看成一個特殊的「錐體」，從而悟出新的證法：將球這個特殊的「錐體」分割成 n 個近似的「小棱錐」(它們都以球心爲頂點，各底面多邊形的頂點均在球面上)。設每個「小棱錐」的底面積爲 S_i、高爲 h_i $(i = 1, 2, 3, \cdots、n)$，

$$V_{球} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}S_i h_i = \frac{1}{3}S_{球}R = \frac{1}{3}(4\pi R^2)(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

對於學生來說：他們「感悟」的這種「新型」證法，不能不被認爲具有數

學的奇異美特徵。上述再創造的實踐過程，是以球體積公式的變形爲起點的。正是這種教學的協同，啓迪了學生的創造靈感，獲得了創造數學美的動力。

4. 深究意蘊，促成飛躍

解題的頓悟，來源於解題主體與解題客體意象的碰撞，而意象有新舊之分、深淺之別，只有當各具特色的意象自由匯入認和系統，經過歸納、比較、綜合、選擇或同化、順應或加工、重組等一系列的智力操作之後，才能促使學生感悟的飛躍，最終達到對命題意蘊的深刻領悟，對於解題能力較低的思維層次不高的學生來說，這一系列智力操作訓練尤爲重要。

例，在數 1、2、3、…1992、1993 前面任意添加上「+」、「−」 號組成一道算式，其結果是奇數？還是偶數？還是有的是奇數有的是偶數？并證明你的結論。

分析：此題已知條件涉及的數學知識太少，加之添加符號的任意性。解此題時，一開始難以看出問題的本質特徵，不妨從最簡單的運算做起，即取特例，如先取所有符號爲「+」則有 $1+2+3+\cdots+1993=1993\times997$ 爲奇數；再全部取「−」，結果也爲奇數；然後把一個數如 1991 前取「−」，其餘取「+」的結果爲 $1993\times997-2\times1991$ 也爲奇數：如此下去可把所有情況驗證完，問題得到解決。但這種方法計算量太大，不可取，此時給自己提出問題：有沒有較簡單的解法？問題本質的特徵是甚麼？經過冷靜地分析後發現：在每個數前添加「+」、「−」 號不影響得數奇偶性，起決定作用的是 1、2、3、…1992、1993 中奇數個數的多少，於是問題順利地解決。

5. 積累經驗，強化體驗

正如教育家奧茨本指出的：「新的思想幾乎毫無例外地是通過重新組合或有發展性的改進，在舊有思想的基礎上發展起來的」。 豐富的知識經驗和不斷獲得新的課題信息是產生悟性的基礎，解題過程是解題主體對解題客體的感悟體驗的基礎上的理性分析、加工和創造過程。解題能力則是學生在把各種類型的命題片段的感知中所迸出的思維火花與所獲得的知識養料加工整理，記憶貯存的基礎上，能將朦朦朧朧的解題體驗概括化并轉化爲順利進行數學活動的方式，才能逐步形成一種綜合性的解題技能，因此，培養解題悟性，進而形成并不斷提高解題能力，強化體驗。例如，解慣了一元二次方程，頭腦中已經貯存了豐富的經驗，對於這樣的問題：「若 a、b、c 均爲有理數，且滿足：$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$，求證 $a=b=c=0$」。如果賦與 $\sqrt[3]{2}$ 以新的性質，把它看作 x，則有 $ax^2+bx+c=0$，而在舊有經驗的基礎上，馬上頓悟出：由 $\sqrt[3]{2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，兩邊立方後利用 a、b、c 爲有理數的條件便可證得結論。

綜上所述，悟性培養在數學解題教學活動中具有重要意義，它不僅有利於學生解題能力的提高，對一般思維重要，而且對數學的創造性活動及創造性思維更爲重要，因此，重視解題教學中的悟性培養應該是從事數學教育活動的人們的一項重要任務。

參考文獻：

1、 蔡道法(1993)。《數學教育心理學》。上海科技出版社。

2、 李玉琪(1991)。《數學方法論》。南海出版公司。

3、 G. 波利亞(1982)(中譯)。《怎樣解題》。科學出版社。

4、 傅海倫(1995)。數學教學中重視數學悟力的培養。《數學通報》第 7 期。