

## 直觀化和抽象化能相輔相成嗎？

### 一堂技術支援下的冪函數教學的探討

黃榮金

香港大學課程學系

#### 一、引言

近年來，各國數學教學大綱紛紛將資訊科技對數學教育的影響放在顯要的位置(黃、莫，1999)。這一世界潮流也已經在我國新的數學課程中得到體現。比如，大陸《義務教育階段國家數學課程標準》指出“把現代技術作為學生學習數學和解決問題的強有力工具，使學生從大量繁雜、重復的運算中解放出來，將更多的精力投入到現實、探索性的數學活動中去(p.6)。又如，香港《新中學課程(2001)綱要》(中一到中五)也強調了資訊技術對數學教學的三種基本作用，他們是作為“一種工具”、“一位導師”和“一位受指導者”(p.47-48),並在附件中提供了大量的實例來展示資訊技術在數學教學中的作用。目前，使用多媒體進行公開課教學已經成為青年教師追求的一種時尚。然而，隨著資訊技術進入數學課堂，數學教師將面臨新的挑戰。例如，如何處理多媒體的演示功能及對數學知識本質的探索；如何處理電腦強大的圖像功能及培養學生抽象能力；如何處理利用互動數學學習軟體進行數學實驗及培養學生邏輯推理能力等(江，1999；郭，1999；黃、莫，1999)。

本文試圖通過一堂技術支援下的冪函數教學課的深入分析來討論使用電腦強大圖像功能來探索函數性質及培養學生抽象思維能力的可能性。

## 二、背景

傳統冪函數性質教學的基本模式是先用描點法畫出幾條特殊指數的冪函數圖像(如冪指數為  $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$  等等)，然後，通過觀察這幾個特殊圖像的性質，“總結”出冪函數在第一象限的性質(單調性)。

最近，筆者在大陸觀看了一堂用《幾何畫板》(Sketchpad)進行這一內容的教學的公開課，受益匪淺。課堂中，教師利用《幾何畫板》，讓學生充分地體驗各種冪函數的圖像變化，進而“發現”冪函數的一般性質；並且借助於《幾何畫板》的局限性：不能直接畫出(分數指數)冪函數在第一象限以外的圖像，教師鼓勵學生根據函數奇偶性去討論冪函數在其他象限的圖像及性質；最後，使用技術和抽象分析彌補了這一不足，深化了學生對冪函數圖像性質的理解。這種技術的直觀化與數學的抽象分析之間的和諧互動，有效地促進了學生對數學知識的理解與掌握，同時，促進了學生直觀化與抽象化思維能力的發展。

## 三、教學實施

這節課分成下列三個階段。

### 1. 直觀探索

(1) 觀察正整數指數冪函數的性質(在第一象限)。

讓學生給出不同的正整指數，使用《幾何畫板》畫出相應冪函數的圖像(如圖 1(1) 所示)，然後要求學生觀察這些函數的圖像並找出他們的共同特點。經過觀察，學生得到第一象限的單調性和過定點 (1, 1) 外，還找到對稱性，體驗到圖像的完美性。

(2) 觀察負整數指數冪函數的性質。

讓學生給出任意負整數指數冪函數，使用《幾何畫板》畫出相應函數的

圖像(如圖 1(2)所示), 然後要求學生觀察這些函數的圖像, 並找出他們的共同特點。

(3) 觀察分數指數幕函數的性質。

通過上述的觀察和分析引導學生, 幕函數的指數已推廣到任何實數, 因此還可以是分數, 接著通過電腦畫出 分數指數幕函數的圖像, 見圖 2(1) 圖 2(2)。通過觀察圖像, 學生很輕鬆地得到了函數在第一象限的性質(單調性, 圖像過(1, 1)點)。

(4) 觀察任意指數幕函數的圖像性質(第一象限)。

基於上述具體的指數幕函數的動態圖像觀察及討論, 我們可以延伸到一般指數幕函數的圖像討論。如圖 3 所示, 讓學生反復觀察隨著指數  $k$  的變化, 相應幕函數的變化。通過上述動態的畫圖、觀察、歸納, 學生容易總結出幕函數在第一象限的性質(過定點及單調性等)。

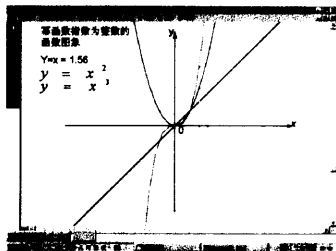


圖 1(1)

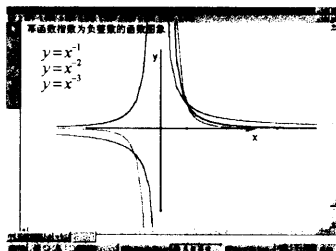


圖 1(2)

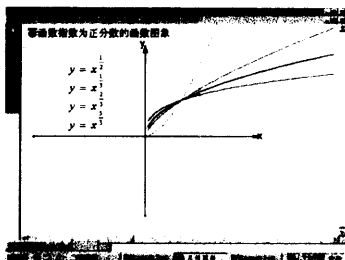


圖 2(1)

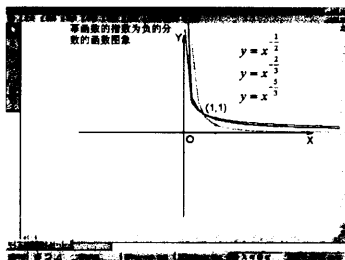


圖 2(2)

正當學生還沈醉於對函數圖像性質的動態探索的回味之中，教師接著提出了下列問題：(1)從圖像中，我們可以發現當冪指數是整數時，函數圖像可能延伸到第二或第三象限。同學們也發現了它們的對稱性，那麼這些函數有甚麼性質？(2)當冪指數是分數時，函數的圖像能否延伸到其他象限？如果能，圖像有甚麼特點。

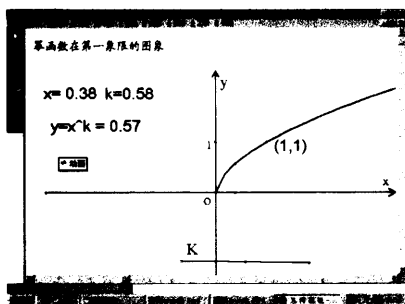


圖 3

## 2. 美中不足

對於上述第一個問題，從圖像或函數奇偶的性質，我們容易發現，當冪指數為偶數時，函數為偶函數，圖像關於  $y$  軸對稱；當冪指數為奇數時，函數為奇函數，圖像關於原點對稱。然而，當學生思考第二個問題時，面臨一個困惑：對某些分數指數，如  $\pm \frac{2}{3}$  或者  $\pm \frac{4}{5}$ ，其對應的冪函數為偶函數，但是，使用《幾何畫板》畫出函數的圖像(如圖 2(1))所示，怎麼也“畫不出”它在第二象限的圖像。如  $\pm \frac{1}{3}$  或者  $\pm \frac{3}{5}$ ，其對應的函數為奇函數，按照奇函數性質，其圖像關於原點對稱，可是怎麼也“畫不出”第三象限的圖像。幾經嘗試，都以失敗而告終，筆者只能暫時將這一結果歸屬於技術的“缺陷”，然後，向學生求助：能否補上那些缺少的部分圖像呢？讓學

生在紙上補上缺少的一部分圖像。

### 3. 柳暗花明

當學生完成這個“補圖”任務後，教師接著提出一個問題：如何使用《幾何畫板》補上缺少的部分圖像？經過學生一陣討論，學生提出：根據偶函數性質，如果點  $(x, y)$  在圖像上，那麼點  $(-x, y)$  也在圖像上；而根據奇函數性質，如果點  $(x, y)$  在圖像上，那麼點  $(-x, -y)$  也在圖像上。在師生共同努力下，最後成功地“補上”這些冪函數的缺少部分的圖像(如圖 3(1)和圖 3(2))。

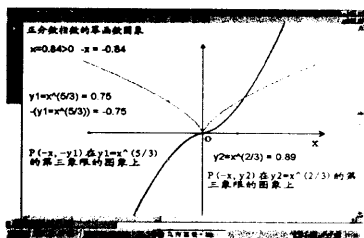


圖 3(1)

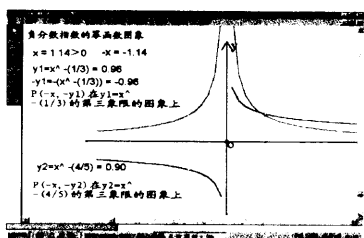


圖 3(2)

### 四、實踐反思

沒有數學教師積極參與開發教材的資訊科技數學教育，其應用的潛能不可能獲得充分發揮(江，1999,p.43)。筆者願再補上一句，教師創造性地在課堂中使用資訊科技才是推動資訊科技數學教育的根本動力和突破口。從這節課中，教師充分展示了強大的電腦繪圖功能對促進學生對函數圖像性質的理解及掌握的作用。同時，教師借助於，一個電腦軟體畫圖時遇到“意外”的情境，激發學生對函數奇偶性的討論，最後，利用函數的奇偶性及《幾何畫板》直觀地展示了這些性質。通過這一系列活動，不僅讓學生體驗到如何“做”數學，也使學生體會在技術支援下學習數學優勢及局限

性，只有充分利用對函數性質的一般性分析(抽象分析)才能更好地利用技術來學習數學。

基於上述討論，筆者認為，(1)在教學中，我們可以利用技術的直觀化功能來促進學生對抽象的數學性質的理解，促進學生抽象思維能力的發展，同時，(2)利用學生已有的數學知識進行抽象的分析，可以更好地使用技術手段來進一步發展學生對數學性質的理解及培養他們的直觀化和抽象思維能力。也就是說，在技術支援下的學習環境中，直觀化能力與抽象化思維能力是相輔相成的。

### 參考文獻

- 郭禮賢(1999): 資訊科技在下一世紀中學數學教育所扮演的角色及其潛在危機, 《數學教育》9, 頁 46-53。
- 黃毅英(1998)。高科技、資訊化社會與數學教育。數學教育, 7。頁 1-3。
- 黃榮金、莫雅慈(1999): 資訊科技對解決數學開放題的影響, 《第四屆來洲數學技術大會論文集》, 頁 211-221。廣東經濟出版社。
- 教育部基礎教育課程教材發展中心(2000): 《義務教育階段國家數學課程標準(徵求意見稿)》。北京師範大學出版社。
- 江紹祥(1999): 資訊科技數學教育, 《數學教育》9, 頁 33-45。
- 課程發展議會(1999): 《中學課程綱要: 數學科(中一至中五(初稿))》, 香港, 教育署。