

重視數學史在數學教育中的應用 ——從中國古算名題“雞兔同籠”的教學談起

傅海倫

山東師範大學數學研究所

數學史的研究應該與數學教育相聯繫。如何在數學教育中運用數學史的知識，充分發揮數學史的作用則是數學教育改革所面臨的一個重要課題。以一九九八年四月二十日至二十六日由國際數學教育委員會(IMI)發起的在法國馬賽附近的 LUMINY 鎮舉行的“數學史在數學教育中的作用”國際研討會為契機，數學史在數學教育中的應用已經進入系統地研究階段，並在一些國家和地區進行實踐性的操作。本文以中國古算中的“雞兔同籠”名題為例，說明將數學史知識溶入小學數學教學的有效途徑和做法。

一) “雞兔同籠”名題溯源

於公元 400 年前後成書的中國古代數學著作《孫子算經》(共 3 卷)是一本初級數學讀物。其卷下記述的數學名題中就有“雞兔同籠”問題：

今有雞兔同籠，上有三十五頭；下有九十四足。問雞、兔各幾何？

答曰：雞二十三；兔一十二。

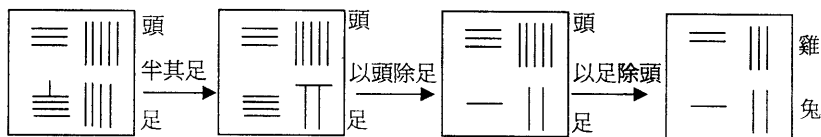
術曰：上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多，再命之。上三除下四，上五除下七。下有一除上三，下有二除上五，即得。

又術曰：上置頭，下置足。以頭除足，以足除頭，即得。

《孫子算經》是中國第一部系統介紹籌算且有算草的著作，從中可以窺視中國古代籌算之概貌。以上“術曰”和“又術曰”就是對“答曰：雞二十三；兔一十二”的解釋和算法過程的展示。其中，“又術曰”又是對“術曰”的進一步簡化和濃縮。這種算法十分奇妙、獨特，充分體現了中國傳統數學以問題為中心，以解決實際問題為目的的機械化、算法化特色。這對於現今的數學教育具有重要的啓示意義：

首先，中國傳統數學與社會實踐聯繫密切。“雞兔同籠”問題來源於社會生產和生活實際，反映人們日常生活的需要。這是一個好傳統。

其次，解決實際題是數學發展的目的，它必以算法研究為中心相聯繫，並適合中國以算籌為計算工具的籌算體系的特點：首先布列籌式，本題中術文即按“上置三十五頭，下置九十四足”的方位排列籌式，然後構造並施以機械化的程序步驟（據專家考證，“除”在古代可作兩意義解釋，一是“減”的意思。如魏晉時數學家劉徽法：除，其減也。二是除法的“除”。此術文中的“除”即指前者）：



以上解法十分奇妙，通過布列籌式方陣，然後規定一套機械化的算法，一步步達到解決數學問題的目的，這是中國傳統數學的突出特點，對現今的數學教育改革與發展具有重要的指導意義。若從當今的觀點看，孫子自己解這個問題時，很可能利用“方程”算法：

設 X 為雞數；Y 為兔數，則

$$\begin{array}{l}
 \text{“上置頭”} \\
 \text{“下置足”}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x + y = A \\
 2x + 4y = B
 \end{array} \right.
 \xrightarrow{\text{半其足}}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x + y = A \\
 x + 2y = \frac{1}{2}B
 \end{array} \right.
 \xrightarrow{\text{以頭除足}}$$

$$y = \frac{1}{2}B - A \text{ (兔)} \xrightarrow{\text{以足除頭}} x = A - y \text{ (雞)}$$

二) “雞兔同籠”問題在當今數學教育過程中的應用價值

首先，“雞兔同籠”作為中國古算中的名題，其本身是個好問題。正因為它是來源於社會生產和生活的實際問題，與小學生的生活十分貼近。將本題引入數學教育中既有利於培養學生的科學意識，引導學生對生活科學、自然界的觀察、感悟和發現，獲取信息；同時，本題又具有一定的思考性、探索性，有利於啓迪學生的思維，展現思維過程。

其次，將“雞兔同籠”問題應用於數學教育的關鍵是教師創設一個好的問題情境。在問題情境中，通過教師適時引導、啓發和點撥，啓迪學生的思維，鼓勵學生積極主動地思考和探索，並能不斷增強學生的興趣。

例如，對“半其足”可設置問題情境：在某一瞬間所有的雞同時抬起一隻足，而每一隻兔也同時抬起前面的兩隻足，這時，雞兔落地的足共有 $\frac{94}{2} = 47$ 隻。這樣設置問題情境，因為雞的頭數正好對應於它們落地的足數，而兔落地的足數正好比頭數多一倍。因此，“半其足”後，一些學生馬上頓悟出足數與頭數之差正是兔數，即兔數為： $47 - 35 = 12$ 隻。

這處理問題的方法巧妙而富有情趣，但是，問題情境的創設仍顯遙遠，可使一部分智力比較好的學生所掌握，而對一大部分學生仍難以頓悟。因此，教師可進一步創設更加貼近大眾學生的問題情境，從小學生的生活常識出發自然平緩地引出解法：

問題情境一：“兔有四隻足，而雞有兩隻足，這豈不是太不公平了嗎？”

經過思考，學生會在教師的引導下，撥出理由，化解矛盾：雞還有兩隻翅膀呢！

問題情境二：“如果翅膀也算足，那麼總共該有多少隻足呢？”

學生容易回答： $35 \times 4 = 140$ 隻足。

問題情境三：“而題中祇有 94 隻足，翅膀並不算足，可見，該有多

少隻翅膀呢？”

顯然，有 $140 - 94 = 46$ 隻翅膀，因此，學生會興奮地異口同聲喊出來：23 隻雞。

上述層層問題情境的創設，更加貼近小學生的生活，最接近學生思維的“最近發展區”，可使每一個學生都能快速理解和掌握，並使學生記憶深刻，甚至終生不忘。

這個例子給我們的啓示是：中國古典數學的思想方法對當今的數學教育有重要的啓發和指導意義。教師愈深入挖掘，充分利用學生們頭腦中已有的知識，創設適宜的問題情境，積極引導學生主動思考和探索。對於前一種創設的問題情境，即讓所有的雞都來“金雞獨立”，同時讓所有的兔後兩隻是站立，這與小學生腦子裡的東西相距較遠，超出了大部分學生思維的“最近發展區”，因此，不易為學生認同和掌握，而後一種問題情境，巧妙地運用了“雞有兩隻翅膀”這件學生們都熟悉的事實，符合學生思維的“最近發展區”。因此，學生易於頓悟，能迅速洞察出問題的本質。

三) 充分發揮“雞兔同籠”智力訓練的教育功能

“雞兔同籠”問題可以作為考查小學生的智力訓練題。不僅如此，對該問題的條件略加改造，又可以生成難度不同的趣味智力題，適應於不同年級和不同程度的學生。

比如，對於小學低年級的學生，可將問題改為：

今有雞兔同籠，共有 8 隻足，問能有多少隻雞和多少隻兔？

學生經過思考，一般能說出有 2 隻雞、1 隻兔的答案，教師應及予以表揚和鼓勵，而對於 4 隻雞或 2 隻兔的情形，學生大都考慮不到，這方面根據情況，教師不必作高的要求。

隨著學生年級的增高和智力的發展，可以將上述問題中的“8 隻足”改為“10 隻足”、“12 隻足”等等。

小學生一般能說出其中的一個或兩個答案，而不能窮盡所有的情況，這說明學生的思維還是無序的、零亂的和實証性的，並未找到處理問題的一般方法。這時，教師應及時引導學生學會科學分類的思想方法。而這種分類的方法會因為選取不同的參照物而有所不同。共有兩種情形：

以“12 隻足”為例，若以雞為參照物，可按雞數為 0, 1, 2, 3……的情形分別分類考查：

雞	0	1	2	3	4	5	6
兔	3	不存在	2	不存在	1	不存在	0

再以兔為參照物，按兔數為 0, 1, 2, 3……的情況分別分類考查：

兔	0	1	2	3
雞	6	4	2	0

以上利用分類的思想方法解決問題，保證不多不漏，為處理這一類問題的一般方法。同時，通過比較上述這兩種因參照物的選取不同而又有所區別的分類方法，又會發現第二種分類最為簡單。因此，這再一次說明問題解決的效果在很大程度上取決於思想方法的選擇。

總之，以上我們通過選取中國古算中的“雞兔同籠”這一名題應用於數學教學過程之中，目的在於說明數學史對數學教育有何助益；應該通過怎樣的途徑和方法發揮數學史在數學教育特別是中小學數學教育的作用，提高數學教學的質量，最大限度地發展學生的能力，並提高學生學習數學的興趣。既然在當今的數學教育中究竟如何有效地運用數學史知識還是一個新的重要課題，1998年4月的馬賽會議，已經介紹了各國許多有價值的例子。相比之下，我們在這方面的研究幾乎還沒有進行。本文正是基於此，發掘中華古算的教育因素，提供一個歷史上真實的“問題”。以拋磚引玉，期望進一步推動這方面的工作。

主要參考文獻

- [1] 張奠宙，“重視‘科學史’在科學教育中的應用”，數學思想的傳播與變革：比較研究國際學術討論會論文，中國武漢，1998年10月。
- [2] 《孫子算經》，載錢寶琮校點《算經十書》（上），科學出版社，1963年第一版。
- [3] 郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，山東科學技術出版社，1992年版。
- [4] Heiede, *Mathematical magazine* 76, No.475(1992).