由$0.\dot{9}$談起

馮振業

香港教育學院數學系

最近有準教師向我提及$0.\dot{9}$是否就是 1 的問題，他那副疑惑的模樣大大提高了我對這個問題的興趣。根據下列的計算，他「看到」$0.\dot{9}=1$：

設 $x=0.\dot{9}$ --------------------(1)

則 $10x=9.\dot{9}$ --------------------(2)

(2) − (1) 得 $9x=1$，

推得 $x=1$。

課堂上的其他學員，在看畢上述推算後也大惑不解，有的還引用了大數學家康托（G. Cantor, 1845-1918）的名句：「我看到，但我不相信。」（原爲法文，英譯成 "I see it, but I don't believe it." 見 Fauvel & Gray, 1987, p.578）來描述他們的心情。

這樣的問題，順理成章可引入有關無窮級數的討論。事實上，

$$x = 0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$$
$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{9}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

是一個公比為 $\frac{1}{10}$（絕對值小於 1）的無窮幾何級數，其和是存在的，

可由

$$x = \frac{\frac{9}{10}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

求得。

在欠缺對級數的理解的學習狀態之下，學生對拿著一串無窮和，湊湊併併，加減乘除，往往是模模糊糊地混過去的。接著上面的討論，給他們下列的演算想是最好不過的：

由 $\begin{cases} u = 1+3+5+7+\cdots & > & 0 \\ v = 2+4+6+8+\cdots & > & 0 \\ w = 1+2+3+4+\cdots & > & 0 \end{cases}$

可知 $\begin{cases} u+v=w & \cdots & (3) \\ 2w=v & \cdots & (4) \end{cases}$

進一步可推得 $u+w=0$，即兩正數之和等於零！！！

也許學生很快便指出「尾巴」越遠越大，是沒可能求和的。果真如此，他們必會對調和級數$\left\{\frac{1}{n}\right\}$不能求和（可由積分檢驗法得知）感到詫異。更甚者，是對任意正整數k，在這個調和級數中，每k項取一項所得的級數$\left\{\frac{1}{kn+1}\right\}$也無法求和（這可由比較檢驗法得知）。再進一步，即使我們只取質數分母項，求和還是不可能的（見 Apostol, 1976, pp.18-19）！

上面的討論說明了一個事實，就是「尾巴」的絕對值趨於零，並不能保證級數收斂。要進行上述 $0.\dot{9}=1$ 的推算，必先確定級數收斂，否則運算是沒有意義的。要確定 0.9 + 0.09 + 0.009 + …收斂，可引用「單調有界必有極限」這個定理，這裏從略。

有否極限對計算極限起著決定性的影響。例如考慮數列$\{x_n\}$，滿足

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) \end{cases} \quad \cdots \quad (5)$$

其中$a>0$。如果已知數列收斂，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ 存在，則於(5)式中取極限便得，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right)$$

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$$

$$l^2 = a$$

$$l = \pm\sqrt{a}$$

再考慮 $\{x_n\}$全為正數，故知 $\lim_{n\to\infty} x_n = l = \sqrt{a}$ 。

如果未知$\{x_n\}$是否收斂，上面的做法或許會碰壁的。例如考慮數例 $\{y_n\}$ ，滿足

$$\begin{cases} y_0 = 4 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n^2 - 3\right) \end{cases} \quad \cdots \quad (6)$$

由數學歸納法可知對任意正整數 n，$y_n \geq 4 \quad \cdots \quad (7)$。可是，如果我們不問情由，像上面對待$\{x_n\}$般處理(6)，則可有以下的演算

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)^2 - 3\right]$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)^2 - 2\lim_{n\to\infty} y_n - 3 = 0$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n - 3\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n + 1\right) = 0$$

推得 $\lim_{n\to\infty} y_n = -1$或 3，與(7)矛盾！

要嚴謹地處理$\{x_n\}$極限的存在問題，可以先證明對任意正整數 n，$x_n \geq \sqrt{a}$ ，而且$x_{n+1} - x_n \leq 0$。那麼，除x_0外，$\{x_n\}$是有下界的遞降數列，故 $\lim_{n\to\infty} x_n$必然存在。

礙於時間問題，我並未與準教師們進行上述仔細的討論，只引用了中學有關無窮幾何級數的結果而已。不過，故事還沒有完。當一輪無窮幾何級數的討論過後，原先發問的學生再提一問，令討論再起高潮：「應怎樣解釋 $0.\dot{9}=1$ 給中三或以下班級的學生？」他的意思其實是要我避開無窮幾何級數！

當大家都接受 $0.\dot{9}$ 不可能大於 1 的時候，要解釋 $0.\dot{9}=1$ 倒不太難。先證明以下引理：

引理

設 $\varepsilon>0$（可以是任意小的正數）。則 $0.\dot{9}+\varepsilon>1$。

證：

不妨假定 $\varepsilon<1$。由於 $\varepsilon>0$，可考慮 ε 在小數點後第一個非零位出現於第 n 位，即 $\varepsilon=0.\underbrace{00\cdots0c}_{n\text{ 位}}\cdots$，其中 $c\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

於是 $0.\dot{9}+\varepsilon>0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 位}}+0.\underbrace{00\cdots0c}_{n\text{ 位}}\geq 1$。證畢。

這個引理告訴我們，無論是多麼小的正數，加到 $0.\dot{9}$ 上都大於 1。

現在，假設 $0.\dot{9}<1$，則 $\varepsilon=1-0.\dot{9}>0$，而且滿 $0.\dot{9}+\varepsilon=0.\dot{9}+\left(1-0.\dot{9}\right)=1\not>1$，與引理矛盾，所以 $0.\dot{9}\not<1$，即 $0.\dot{9}=1$。

無窮的世界是不容易捉摸的，也許我們應該先讓學生接觸這個詭異的領域，使他們感受當中的懸疑奇幻，最後才帶領他們學習分析的手法，說不定會有意想不到的效果。

參考資料

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to analytic number theory*. New York: Springer-Verlag.

Fauvel, J., & Gray, J. (Eds.) (1987). *The history of mathematics: A reader*. London: Macmillan.