

## 現實情境作為數學學習的起點：荷蘭經驗<sup>[1]</sup>

黃家鳴

香港大學課程學系

利用日常生活處境作為數學學習課業的內容，近年已有不少討論。無論是數學課程發展的同工，以致前線的數學教師，基本上都同意這種課業的運用有多方面的好處，包括引發學生的學習動機、提高課堂教學活動的趣味性與及培養學生運用數學知識於現實情境的能力等等，在在都能配合當前數學課程的目標，促進學生的數學學習。

筆者以往曾就這個主題對上述觀點作過不少評論<sup>[2]</sup>，本文並不擬重彈舊調，轉而想介紹一個與此相關的數學教育的理念架構及其實踐經驗，供本地的數學教育同工參考。必須先始聲明，筆者完全無意推介輸入這種教學模式，因為所涉及的不單只是一種教學方法，還有的是與之一致的數學觀、數學課程目標及相輔相承的教與學的文化。教育問題的考察，總不能離開既有的歷史時空、政治經濟文化等背景。向讀者介紹這個數學教育觀點，為的只是以別國的教育理念與實踐作為一面鏡子，檢視一下我們自己數學教學的觀點，以及一些不自覺的、先入為主的想法。正如一位比較教育的研究者提過，看一下別人的學校，會對我們自己的學校多一分瞭解<sup>[3]</sup>。

## 荷蘭的「現實主義數學教育」

要談如何運用真實世界的事例作為數學教學的起始點，實在不能不探討一下別樹一格的荷蘭的「現實主義數學教育」（荷蘭文 *Realistisch reken-wiskunde onderwijs*，英譯 *Realistic mathematics education*，以下簡稱 RME）。這個中文譯名或許有點誤導，但暫且採用，其確切涵義就由下文來解釋了。RME 的理論架構可以追溯到七十年代初期，為回應當時美國的「新數學」（*New Math*）浪潮與及為人詬病的傳統較機械式的數學教學方法而提出的一項荷蘭本土的數學教育改革方案。值得一提的是這項改革的研究、實驗、實施、修訂已經歷三十多年，至今仍在致力發展，而以往要針對的一些弊端仍然存在<sup>[4]</sup>。由是觀之，草率匆促的課程改革方案只會以失敗告終，更遑論那些不以現實為基礎、鋪天蓋地的教育改革藍圖了。

RME 可說是建基於荷蘭數學家、數學教育家 Hans Freudenthal（1905-1990）在七十年代初所提出對數學和數學學習的觀點<sup>[5]</sup>，他認為數學教學若要保有其人本價值，必須要與現實世界的事例有著密切關係，既要貼切於學生的生活世界，也要與社會息息相關。數學應被視為一項活動（*activity*），而非一堆有待灌輸的學習材料。數學教學乃是要提供合適的場景，協助學生進行數學活動，從而「再發明」（*re-invent*）數學。簡而言之，數學不應被視為一個既有的封閉系統，數學教育的焦點應在於數學作為一

項活動、在於「數學化」(mathematisation) 這個過程。

或許「再發明」數學的提法令人覺得高深得有點不可思議，但 RME 的實踐經驗至少已經證明在小學階段的數學教學中，小孩子面對各種不同的四則運算情境，都的而且確能夠提出他們自己的算法，雖然起初比不上傳統的算法快捷，但卻能透視箇中的數學關係並且能行之有效<sup>[6]</sup>。Freudenthal 也指出開展這些學生活動，不僅出於教學法的理由，也同時考慮到學校體制的問題。由於教師必然面對如何評估學生在學習上面的進展，就數學科來說，若以傳統方式教授現成數學，單純地要求學生覆述所學過的數學內容，當然不是好辦法。於是測試學生能否運用現成數學的題目必然演變為練習，而考試題目最終必成了教學的終極目的。Freudenthal 認為在 RME 中數學的每次應用都是一次重新的創造，能引入數學的靈活性，使這新的數學變得更有應用價值，亦正正回應了長期以來沉悶教學模式所導致的缺乏運用價值的「模仿數學」的後果。

### 「數學化」作為數學教學的焦點

Freudenthal 提出數學作為一種活動，而當中的「數學化」過程則是整個數學教育的中心目標。他所指的「數學化」過程，並不限於將一個現實情境的問題重新表述成一個數學問題，而是指在數學意義上的一種層次的提升 (level-raising)，即在某一個層次上的活動成為另一層次分析的對象、

材料。在這個「數學化」的過程中，學習者可以對其所作出的一些實質數學運算作推廣、分類、尋找相似性、步驟的整理和系統化、引入符號表述、推斷、肯定或否定猜想、證明等等進一步的活動。簡而言之，「數學化」乃是以數學的方法、手段去認識並且組織現實經驗的過程。這種「數學化」過程一方面帶出了數學本有的方法，使學生掌握這種基本的數學進路、態度，直接體會數學如何處理現實問題，瞭解如何歸結出數學上的解和這種解的局限性。另一方面，這個過程也正正引領學生們去「再發明」數學，而非限於被動地接受現成的數學結果。

正是基於這點想法，在 RME 的教學中，都是以現實情境的問題 (contextual problem) 為出發點，而這些問題又往往設計到可以容讓學生有多種不同的、非正規的方法去處理，從中讓學生通過「數學化」再創造他們自己的數學方法。至此值得對「現實」這個詞略作補充，事實上 RME 這個英譯亦引起不少誤解，將它等同於 “real-world” mathematics education，等同於以「真實」(authentic) 的處境問題來進行數學教學。但究其荷蘭文本義，動詞(組) “zich realiseren” 解作想像 (to imagine)，因此荷蘭文 realistisch 其實比英文 realistic 有較廣泛的涵義，可以指我們頭腦中所能呈現的、想像的情境，是故在 RME 中完全可以採用神仙故事的虛幻世界作情境，只要是學習者有能力理解、想像便可以了。

## 何謂「再發明」數學：一個學習除法的示例

為著說明一下 RME 中的數學化過程，以下我們試舉長除法的教學為例，看一下（8 至 9 歲的）學生怎樣建構他們的方法<sup>[7]</sup>。先以下面的一道問題開始：

今天晚上學校舉行家長會，有 81 位家長參加。現需要佈置場地，每張可坐 6 人，問需若干？（這類問題一般都附有插圖，這裏從略。）

學生們提出不同的計算方法，有以連加法  $6+6+6+6+\dots$  或列寫乘法  $1\times 6, 2\times 6, 3\times 6, \dots$ ，甚至僅寫倍數 6, 12, 18,  $\dots$  等來作出答案。亦有小孩子先以  $10\times 6$  作開始看看需要多加多少個 6 才能達致要求。更有熟記  $6\times 6 = 36$  的小孩子將其雙倍得  $12\times 6 = 72$ ，另多加兩次 6 而求得結果。教師的工作乃在於引導小孩子討論並比較不同的計算法，例如看看是否大多數孩子都能同意  $10\times 6$  作開始是一個合適的捷徑。接著的問題可以是：

一壺咖啡可以倒出 7 杯咖啡。若為每位家長泡製一杯咖啡，籌備這個家長會需要泡製多少壺咖啡？

這一次小孩子的計算方法會有所「進步」，結合了先前的經驗及討論結果，可以想像會有很多小孩子懂得選用  $10\times 7$  作為開始來推算答案。

於是通過更多類似的情境問題，學生的計算經驗及非正規的算法便可

以逐步整理、調適、系統化而向我們的標準長除法過渡。正如以下一道問題所得到學生的不同解決方法中所顯示的、近乎標準的除法：

公共汽車一輛可載 36 人。現有 1128 名士兵，問需要多少輛公共汽車？

$$\begin{array}{r}
 36 \overline{) 1128} \\
 \underline{360} \quad 10 \text{ 輛} \\
 768 \\
 \underline{360} \quad 10 \text{ 輛} \\
 408 \\
 \underline{360} \quad 10 \text{ 輛} \\
 48 \\
 \underline{36} \quad 1 \text{ 輛} \\
 12 \quad (1 \text{ 輛}) \\
 \text{共 } 32 \text{ 輛}
 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r}
 36 \overline{) 1128} \\
 \underline{720} \quad 20 \\
 408 \\
 \underline{360} \quad 10 \\
 48 \\
 \underline{36} \quad 1 \\
 12 \quad (1) \\
 32
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r}
 36 \overline{) 1128} \\
 \underline{1080} \quad 30 \\
 48 \\
 \underline{36} \quad 1 \\
 12 \quad (1) \\
 32
 \end{array}$$

(c)

在高年級教授多位數除法時，以下的一道問題同樣地可以引領學生作出一些非正規的運算而得到答案：

一首荷蘭貨船在 Nova Zembla 小島旁擱淺（這個也同時是其他教學單元所虛擬的情境）。船長查明船上還存有 4000 塊餅乾，而船上共有 64 名船員。若每人每天分配 3 塊餅乾，一天將消耗 192 塊。問餅乾供應可維持多少天？（插圖從略）

學生一般都可以用連減法來推算這個日數，開始時用較小的數字，及後會有系統地用較大的數字連減，如下：

$\begin{array}{r} 4000 \\ 192 \\ \hline 3808 \\ 192 \\ \hline 3616 \\ 192 \\ \hline 3424 \\ 192 \\ \hline \vdots \end{array} \quad - 1 \text{ 天}$	$\begin{array}{r} 4000 \\ 192 \\ \hline 3808 \\ 384 \\ \hline 3424 \\ 768 \\ \hline 2656 \\ 1536 \\ \hline \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} - 1 \text{ 天} \\ - 2 \text{ 天} \\ - 4 \text{ 天} \\ - 8 \text{ 天} \end{array}$	$\begin{array}{r} 4000 \\ 1920 \\ \hline 2080 \\ 1920 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{l} - 10 \text{ 天} \\ - 10 \text{ 天} \end{array}$
---	--	--

於是再通過恰當的討論和再嘗試，多位數的長除法運算方式便應運而生了，而且學生一般都可以看懂當中標準算法各個步驟的意義。

### 橫向與縱向數學化

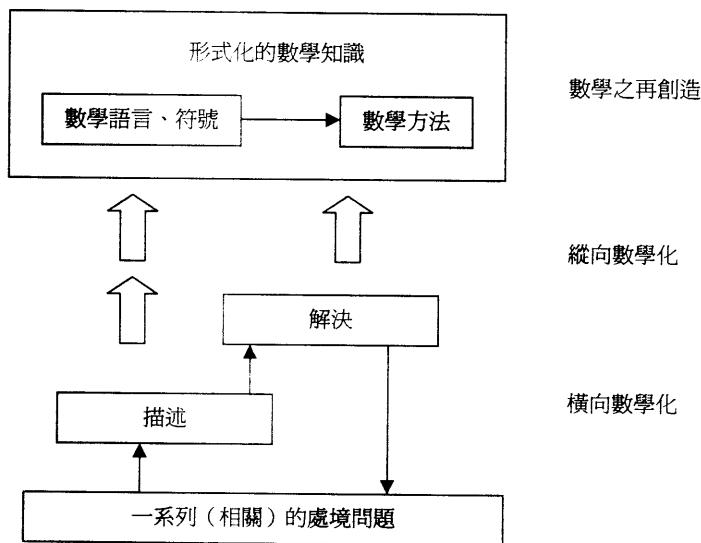
要更好地理解 RME 的學習過程，有必要把橫向和縱向數學化（horizontal and vertical mathematisation）區別開來。橫向數學化乃是將我們的生活世界（the world of life）引向符號世界（the world of symbols）。在生活世界裏，人們在生活、活動，所經歷的就是現實。而在符號世界裏則是抽象化的事物，符號被建構、被重塑和被運用，機械地卻又是全面而省察地被使用，這就是縱向數學化，也就是將符號、概念、關係等作分析、類比、重組、整理的過程。這兩個世界的分野其實有點模糊，因為一些事物在某些處境下屬於生活世界，但在另一處境下卻可能屬於符號世界，例

如路線圖、地圖、幾何圖形等。所以嚴格一點來說，橫向和縱向數學化的分別多少仍依賴於特定的情境。

在初等數學教育的情況中，以橫向數學化為主，以生活經驗為出發點，以非數學的事物為對象而進行數學化。但中學階段的數學學習，學生既已積累到豐富的數學經驗，就可以把數學本身的對象作進一步的橫向及縱向數學化。

透過這個區分，我們可以這樣來理解 RME 的數學學習過程。圖中下半部為橫向的數學化過程，從一系列相關的處境問題出發，通過恰當的表述而達到一些特例式的、非正規的解決方法。在更多的運用、討論、分析和整理之後，漸漸成形的是一套相關的數學符號、表述形式和數學方法。這個分析、類比、組織過程正是縱向數學化，而由此數學知識在一定程度下被重新創造、發明出來，這就是 RME 的梗概。由於篇幅所限，有關的教學原理和課程組織原則等細節，就留待有興趣的讀者自行探討了。

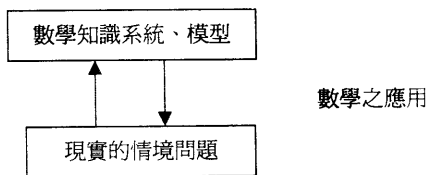




### 一點反思

回顧我們在「目標為本課程」的架構之下所提倡的情境化數學教學，主要是出於提高學習興趣、令知識與生活情境有較密切的關係、培養學生運用數學知識解決現實問題的考慮，與上述 RME 的理念架構簡直南轅北轍。細心分析一下，我們大多數數學老師的教學想法當中，其實都有這種(潛在的)假設，就是先要讓學生掌握有關的數學知識，然後才能運用於問題解決 (problem-solving) 上面。數學知識的運用在於將一個處境問題「翻譯」(translation) 成數學的語言或建構相關的「數學模型」(mathematical model)，然後通過數學方法解決(所建立的數學)問題，再將解答連繫到原來的問題情境中去。這個理念看似合理，但失之於對數學學習過程的認識

太過簡陋，忽略了解難過程與數學學習兩者之間有著互動的影響、相輔相承的辯證 (dialectical) 關係；筆者早已作過評論，不在此贅述<sup>[8]</sup>。



這種對數學知識的學習及運用的理解頗近乎常識，並且潛藏於不少課程設計的架構之中，亦有不少數學教師不自覺地以此觀點來看待他們的教學任務。有部份教師在執行「目標為本課程」時多少亦為此意念而「拖累」，經常訴說學生在情境化問題開始的教學中未能掌握有關的數學知識，最終還是要（用額外的時間）進行傳統方式的教學再教有關的數學方法一遍。在當前這個理念混雜不清的「目標為本課程」架構之下，筆者實在無話可說。

前文所介紹的 RME，筆者早已聲明只作參考及自省之用，完全無意「移植」其理念。事實上我們的教師既無時間（課程進度一般還是很緊迫）、也無空間（教師亦缺乏自主性，往往只能為既定的課程目標而忙碌）去作這方面的教學嘗試。近年本地數學教育圈子中有馮振業先生提出過「數學化」這個課題供大家思考，他既從理念上提出要將數學教得更有數學味道，復又在實踐上試行一些教材和教法，倡導實現一定程度的「數學化」過程於

課堂教學之中<sup>[9]</sup>，有關的理念和經驗都是值得我們積極討論和嘗試的。

正如當年 RME 在荷蘭本土萌芽成長，乃是荷蘭的數學教育工作者對教學改革提出的本土的回應方案。我們現階段需要的，或者是更多的、從基礎問題出發的檢討、反省、小規模的嘗試和累積經驗，希望在下一次的課程檢討和改革時能產生一些更有意義的本土方案。別人用三十年的時間做一件事，還覺得有待改善、未盡人意，多少對我們有點啓示吧。但願我們的數學教育工作者不會被那些荒唐、好大喜功的教育改革藍圖所迷惑，認真踏實地當個好園丁！<sup>[10]</sup>

## 註釋

[1] 本文之綱要曾以《數學課業中的生活處境：真實、虛擬又如何？》為題作短講於數學教育研討會「數學教育之生活化與數學化」，主辦機構為香港中文大學課程與教學學系，香港，19.02.2000。

[2] 請參看：

黃家鳴（1996）。現實情境作為數學課業內容之再思。《數學教育》，第三期，頁 50-52。

黃家鳴（1997）。生活情境中的數學與學校的數學學習。《基礎教育學報》，第七卷，第一期，頁 161-167。

黃家鳴（1998）。數學文字題及課業的處境應該有多真實？《數學教

育》，第七期，頁 44-54。

Wong, K.M.P. (1997). Do real-world situations necessarily constitute “authentic” mathematical tasks in the mathematics classroom? *Curriculum Forum*, 6(2), 1-15.

[3] King, E.J. (1958). *Other schools and ours*. New York: Rinehart & Co.

[4] “Work under construction” 是推動 RME 的一群數學教育工作者三十年後的今天對這項方案的描述，請參看

<http://www.fi.uu.nl/en/rme/welcome.html>。

[5] Freudenthal 及他的同工所提出對數學和數學教育的觀點，可見於他們多本英文著作，有興趣的讀者可以參考：

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (Ed.). (1993). *The legacy of Hans Freudenthal*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1978/1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction -- The Wiskobas project*.

Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. (荷蘭文原版 1978)

本文因僅屬簡介性質，文中所述觀點不再一一列明出處。

[6] 例如一項比較英國和荷蘭學童在解決一些計算題時在策略上所見後者的靈活性，見 Treffers, A., & Beishuizen, M. (1999). Realistic Mathematics Education in the Netherlands. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching*

*numeracy in primary schools* (pp. 27-38). Buckingham, UK: Open University Press.

[7] 以下的示例取材自 Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp.315-345). Hove, UK: Psychology Press.

[8] 黃家鳴(1997)。*小學數學文字題：只是應用的練習題嗎？*《數學教育》，第四期，頁 32-33。

[9] 請參看：

馮振業 (1997)。*《把數學課變得「數學一些」》*。論文發表於數學教育研討會「新時代基礎數學教育」，主辦機構為香港中文大學課程與教學學系，香港，17.05.1997。

馮振業 (1999)。*《數學化教學：由夢想到現實》*。論文發表於「基礎數學教育的優化」研討會，主辦機構為香港中文大學課程與教學學系，香港，24.06.1999。

[10] 法國社會學大師 Pierre Bourdieu 在近期一次訪問中說：「按部就班地做一大番小事，總好過進行些翻天覆地的改革。.... 教育改革者則更應該以園丁而非工程師自居。」詳見 Harriet Swain's "Move over, shrinks." (*The Times Higher Education Supplement*, 14 April 2000 (No.1431), p. 19).