

例談數學問題解決的教學意義和策略

傅海倫

山東師範大學數學系

一、 數學問題解決的教學意義和教學策略

數學問題解決已成為國內外數學教育界研究的重要課題。數學問題解決之所以受到重視，根本原因在於它於它的目的性以及在數學教學中發揮的重要作用。由於數學問題解決不是已有數學知識的直接運用，不是現有題型的簡單翻版，也不是現成方法的機械模仿，而是要通過信息的再加工處理，重新組織已有的數學概念、定理，充分描示出問題的本質屬性，從而探索出一個全新的方法，這是和數學教學要達到的目標契合一致的，我們認為數學問題解決至少有助於下列目標的達成：

1. 化數學意識。只有問題解決才能使所學知識得到創造性地運用。由於問題解決強調處理發展型的問題、開放式的問題和以發現和發明為目的的問題，強調將實際問題抽象成數學問題，因而它會更好地培養學生創造性地解決問題的意識和能力，使數學意識得到質的飛躍。
2. 為學生提供實踐應用數學的機會，以認識和掌握數學與現實生活和其他學科的聯系，學生通過自身參與的問題解決，有助於獲得和加深對數學知識、數學思想方法的理解。
3. 通過準確迅速地把握數學問題的條件關係，設計求解計劃，並對結果作出檢驗和回顧等問題解決的環節和步驟，充分展現學生的思維過程，培養和訓練學生思維的敏捷性、深刻性、靈活性、獨特性、批判性等優良品質。
4. 使學生充分體驗到運用數學知識解決實際問題的樂趣。通過現實的問題情境，可大大激發學生的求知欲望，提高學生學習數學的興趣和信心，並在解決數學問題中，增強毅力和克服困難的勇氣，培養良好的個性品質。

問題解決有一些基本的策略和方法，在數學教學中加以歸納，並以各方式和途徑把它們傳授給學生，使學生通過親自的體驗掌握這些策略和方法

是大有裨益的。這裡歸納出一些常用的問題策略：

1. 通過列表分析數據，或通過圖表研究規律
2. 構造和使用數學模型
3. 歸納、聯想
4. 轉化與變式處理
5. 比較與類比
6. 嘗試解決有關的簡單問題，並尋找規律——結果和方法
7. 猜想問題答案、驗證結論
8. 作一般化和特殊化處理
9. 通過嘗試——錯誤——修正，逼近問題
10. 估計、推算

根據數學問題解決的活動過程，一個成功的問題解決者應具備以下能力 ([1])：

- (1) 能將與解決問題有關的信息從問題中無關的信息中區分出來。他們對信息刺激極其敏感，在具體解題中善於聯想，具有較強的洞察力，既能正向思維，又能多向思維。
- (2) 能既快又精確地覺察出問題的教學結構。
- (3) 能通過廣泛的一系列的問題的 analysis 解決，將問題一般化、模式化。
- (4) 能長期記憶問題的數學結構，易於知識的正遷移。

二、 數學問題解決的數學途徑舉例

(1) 設計問題，特別是非常規問題和應用問題

問題解決的教學目的就是為了培養學生解決問題的能力，選擇一個好問題是問題解決教學的一個重要前提和基礎，根據前文所述一個“好”問題的條件和標準，教學教師精心選擇和設計好每一個問題顯得尤為重要和迫切。數學源於生產和生活實際，數學概念和知識的產生與發展是與實踐分不開的，在數學教學中，從現實問題引入，有利於提高學生的學習興趣和積極性。由於學生有一定的實際體驗有助於理解相對抽象的數學知識，並能增強學生創造性地解決實際問題的意識和能力，當前應特別注意適當精選和設計非常規的數學問題與實際應用問題，這對於改革數學教學及促進學生的數學學習是十分必要的。

(2) 精心創設問題情境，促使問題解決

前文關於問題解決的過程討論中曾經指出，數學問題解決是在一定的問題情境中開始的。數學問題解決的教學，就要求教師根據問題的性質、學生的認識規律和學生所學知識的內部聯系，創造一種教學中的問題情境，以引起學生內部的認知矛盾衝突，激發起學生積極、主動的思維活動，再經過教師的啟發和幫助，通過學生主動分析問題、探索並提出解決問題的方法、檢驗這種方法等思維活動，達到掌握知識、發展能力的教學目的。以下以中國古算中的“雞兔同籠”問題為例，說明在問題解決的教學中精選教學問題以及創設問題情境的有效途徑和做法。

例：“雞兔同籠”問題

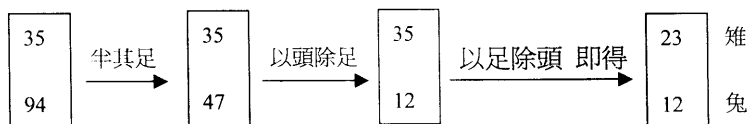
於公元 400 年前後成書的我國古代數學著作《孫子算經》（共 3 卷）是一本初級數學讀物，其卷下記述著著名的“雉兔同籠”（現通稱“雞兔同籠”）問題：

【原文】今有雉兔同籠，上有三十五頭，下有九十四足。問雉兔各幾何？
答曰：雉二十三；兔一十二。

朮曰：上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多，再命之。上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。
又朮曰：上置頭，下置足。半其足。以頭除足，以足除頭，即得 ([2])。

首先我們看一下我國古代解決這個問題的方法。以上“朮曰”和“又朮曰”就是對“答曰：雉二十三；兔一十二”的解釋和算法過程的展示。其中，“又朮曰”又是對“朮曰”的算法的進一步簡和濃縮。

依據朮文，問題解決過程表示如下（用現代數字代替算籌符號）：



以上解法十分奇妙，通過布列籌式方陣，然後規定一套機械化的算法，一步步達到解決數學問題的目的，這是我國傳統數學的突出特點，對我們今天的數學教育注重問題解決的教學具有重要的啟示意義。

首先，“雞兔同籠”問題作為我國古算中的名題，其本身是個好問題，正因為它是來源於社會生產和生活的實際問題，與中小學生的生活十分貼近。本題切入數學教育中既有利於培養學生的科學意識，引導學生對生活科學、自然界的觀察和發現，獲取信息；同時，本題又具有一定的思考性和探索性，有利於發展學生的思維能力。

其次，“雞兔同籠”問題在數學教育中的切入關鍵是教師創造一個好的問題情境，在問題情境中，通過教師適時引導、啟發和點撥，啟迪學生的思維，鼓勵學生積極、主動地思考和探索，並能不斷增強學生的興趣。

例如，對“半其足”可首先設置如下問題情境：在某一瞬間所有的雞同時抬起一隻足，而每一隻兔子也同時抬起前面的兩隻足，這時，雞兔落地的足共有 47 隻。這樣設置問題情境，由於雞的頭數正好對應於它們落地的足數，而兔子落地的足數正好比頭數多一倍。因此，“半其足”後，一些學生馬上會頓悟出足數與頭數之差正是兔數，即兔為 $47 - 35 = 12$ 隻。這種處理問題的方法巧妙而富有情趣，但是這種問題情境的創設仍顯遙遠，它能使一部分智力比較好的學生所掌握，而對於大部分學生仍難以頓悟。

教師可進一步創設更加貼近大眾學生的問題情境，可從小學生的生活常識出發自然平緩地引出解法 ([3])：

問題情境：“兔有四隻足，而雞有兩隻足，這 不是太不公平了麼？”

經過思考，學生會在教師的引導下，找出理由，化解矛盾：雞還有兩隻翅膀！

問題情境：“如果翅膀也算足，那麼總共該有多少隻足呢？”

學生容易回答： $35 \times 4 = 140$ 隻

問題情境：“而題中只有 94 隻足，翅膀並不算足，可見，有多少隻翅膀呢？”

顯然，有 $140 - 94 = 46$ 隻翅膀，於是學生會興奮地異口同聲地喊出來：23 隻雞。

上述一層層問題情境的創設，更加貼近學生的生活，最接近學生“思維的最近發展區”，可使每一個學生都能快速理解和掌握，並使學生記憶深刻，甚至終生難忘。

這個例子給我們的啓示是：我國古典數學的思想方法對當今的數學教育有重要的啓發意義，教師應深入挖掘，充分利用學生們頭腦中已有的數學知識，創設適宜的問題情境，積極引導學生主動思考和探索。對於前一種創設的問題情境，讓所有的雞都來個“金雞獨立”，同時讓所有的兔子後兩隻足站立，這與學生腦子裡的知識相距較遠，超出了大部分學生“思維的最近發展區”，因此不易讓學生所認同和掌握，而後一種問題情境，巧妙地運用了“雞有兩隻翅膀”這件學生們都熟悉的事實，符合學生“思維的最近發展區”，因此學生易於頓悟，能迅速洞察出問題的本質。

第三，作為智力訓練的“雞兔同籠”問題的教育功能：“雞兔同籠”問題可以作為考查學生的智力題，不僅如此，對該問題的條件略加改造，又可以生成難度不同的趣味智力題，適應於不同年級和不同程度的學生。

比如，對於小學低年級的學生，可將問題改為：今有雞兔在同一籠子裡，共有 8 隻足，問能有多少隻雞和多少隻兔？

學生經過思考，一般能說出 2 隻雞 1 隻兔的答案，教師應及時予以表揚和鼓勵。而對於 4 隻雞或 2 隻兔的情形，學生大都考慮不到，這方面可根據情況，教師不必作高的要求。

隨著學生年齡的增高，智力的發展，可將上述問題中的“8 隻足”改為“10 隻足”、“12 隻足”、“14 隻足”，等等。

學生一般也能說出其中的一個或兩個答案，而不能窮盡所有的情況，這說明學生的思維還是無序的、零亂的和實証性的，並未找到處理問題的一般方法。這時，教師應及時引導學生學會科學分類的思想方法。而這種分類的方法會因為選取不同的參照物而有所不同，共有兩種情形：

以“12 隻足”為例，若以雞為參照物，可按雞數為 0、1、2、3、……的情況分別分類考查

雞	0	1	2	3	4	5	6
兔	3	不存在	2	不存在	1	不存在	0

再以兔爲參照物，按兔數爲 0、1、2、3、……的情況分別分類考查

兔	0	1	2	3
雞	6	4	2	0

以上利用分類法解決問題，保證不多也不漏，是處理這類問題的一般方法。同時，通過比較這兩種因參照物不同而有所區別的分類方法，又會發現第二種分類最簡單、最可取。因此，這再一次說明了問題解決的效果在很大程度上取決於思想和方法的選擇。

文獻注釋

- [1] 張奠宙等·數學教育學·江西教育出版社·1991年·228。
- [2] 《孫子算經》，郭書春校點《算經十書》，遼寧教育出版社·1998年·23。
- [3] 張景中·把數學變得簡單一些·面向 21 世紀的中國數學教育·江蘇教育出版社·1995年·80。