不合邏輯的數學

馮振業

筆者曾面對這麼一道題：

「如果 $I-AB$ 是可逆矩陣，證明 $I-BA$ 也是可逆矩陣。」

當時在場的有幾位數學「發燒友」，大家各自唸唸有詞，耽天望地，指手劃腳。數分鐘後，其中一人突然發難，寫下：

「如果 $I-AB$ 的逆矩陣是 M，則 $I-BA$ 是可逆矩陣，
而且它的逆矩陣是 $I+BMA$。」

經過少許直接驗算，眾人皆讚嘆這個巧妙的發現。在一輪歡呼聲過後，大家不期然相互對望，流露出一臉茫然。接著一齊高聲發問：「這個 $I+BMA$ 是怎樣找出來的？」

這位令人仰慕的解難專家這樣回答：
「先以「冪級數」方法展開 $(I-AB)^{-1}$ 和 $(I-BA)^{-1}$，得

$$(I-AB)^{-1}=I+AB+(AB)^2+\ldots=M，$$
$$(I-BA)^{-1}=I+BA+(BA)^2+\ldots=N。$$

要證 $I-BA$ 可逆，只要能把 N 表成 A、B、I 和 M 的組合，就可以用直接驗算解決問題。但這明顯不過，因
$BMA=BA+(BA)^2+(BA)^3+\ldots$，所以 $N=I+BMA$。」

這個例子給我們上了重要的一課：數學不單是邏輯推理，還包括「不太有邏輯」的推理。在上例中，在不能講收斂及乘法不可換的環境下，以級數展開已是十分「不合邏輯」。其後還拿這串東西運算拼砌，造個 N 來，真是可惡得緊。然而，這一連串「不合邏輯」的思想過程，卻給我們找到關鍵算式，能不叫人驚嘆？

很多人或許以為這只是一個沒有一般性的解題巧合，但是筆者在另外一個場合再把這道題交給一位物理學家，這回他雖不能在數分鐘內解答，但最終仍告訴了我同樣的思考過程。也就是說，解題策略在眾多「巧合」之中仍有其跨人物的共通點。

在現代數學解難的文獻裏，我們把這種思巧方法叫做「探索法」（heuristics）。它是指多面的對問題的攻擊手法，不一定源於嚴謹的邏輯，甚至可能跟數學以外的東西扯上關係。(例如亞基米德就在《方法談》（Method） 中揭露他的有關球體體積公式的發現是和天秤扯上關係。)

要瞭解多一點，可參看下列文獻：

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, 2 volumes.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematical discovery (combined edition).* New York: Wiley.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego, California: Academic Press.

上面三本波利亞（Pólya）的巨著已有中譯本如下：

波利亞〔1993〕。《怎樣解題》〔閻育蘇譯〕。台北：九章。

波利亞〔1992〕。《數學與猜想》〔李心煽、王日爽、李志堯譯〕。台北：九章。

波利亞〔1989〕。《數學發現》〔九章出版社編輯部譯〕。台北：九章。