回文積連環等式及其副產品

黃志華

由於對稱之美，可以回文的東西常常都很吸引人們的注意。在文獻[1]中，便舉了不少中文詩歌、對聯的回文例子。

其實英語世界裏也有許多教人驚奇的回文句子。像文獻[2]裏，便列出好些句例，姑摘錄兩三句與讀者分享：

Ten animals I slam in a net
Was it a can on a cat I saw
Now no swims on Mon

最後一句，是具雙重對稱性的。即除了左右對稱，還可以讓你旋轉180度後原句依然不變。

以下幾句，也讓人拍案叫絕：

Must sell at tallest sum
Able was I ere I saw Elba
Bob, 'Did Anna peep? "Anna, "Did Bob?"

當中第二句是模仿拿破崙的口吻說的。

數學家對於能回文的數和式子也常感興趣，編寫成字典一般的文獻[3]之中，便收入了不少與回文有關的數字。對於63504這個數字，文獻[3]這樣描述：

$63504=441\times144=252\times252$. The smallest number, not a multiple of 10, to equal the product of a number and its reversal in two ways. Another example, with a palindrome, and therefore a square, is: $7683984=2772^2=1584\times4851$. If, however, the palindrome 252 is considered a defect, then a larger non-palindromic example is: $144648=861\times168=492\times294$.

不過，在文獻[3]裏再沒有說及，會否有自然數能有兩種以上的這種表示方式？換成數學語言就是：

會否有這樣的自然數N滿足

$$N = A_1 \times m(A_1) = A_2 \times m(A_2) = \cdots\cdots = A_n \times m(A_n)$$

其中 A_1，A_2，A_3，…，A_n 爲互不相等的自然數，$m(A_i)$ 是A_i的鏡反數，例如若 A_i 是 2943，則$m(A_i)=3492$，而$n \geqq 3$。

在文獻[1]中，曾介紹筆者以生成數方法來構作出等式

$$A_1 \times m(A_1) = A_2 \times m(A_2) \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

近年筆者發現，把這個方法再變化一下，不難構作出

$$A_1 \times m(A_1) = A_2 \times m(A_2) = \cdots\cdots = A_n \times m(A_n) \cdots \quad (2)$$

這裏 n 是可以非常大的。

爲了交代清楚，我們且回到起點，看看如何用生成數方法構作(1)式。

設 u ，v 皆是個位數不是零的正整數，且 $m(u) \neq u$，$m(v) \neq v$，並在下述的四種乘積計算的過程中

Ⅰ)　$u \times v$，
Ⅱ)　$m(u) \times v$，
Ⅲ)　$u \times m(v)$，
Ⅳ)　$m(u) \times m(v)$，

都沒有進位，則令

$$P = u \times v，Q = m(u) \times v，$$

這時不難發現

$$m(P) = m(u) \times m(v)，m(Q) = u \times m(v)，$$

並且
$$\begin{aligned} P \times m(P) &= u \times v \times m(u) \times m(v) \\ &= m(u) \times v \times u \times m(v) \\ &= Q \times m(Q) \cdots\cdots\cdots \quad (3) \end{aligned}$$

這就給出(1)式了！而 u 、 v 就是能給出(1)式的生成數。

這個方法是如何想出來的呢？回憶起來，初時自己是用代數和同餘式方法來求解的，但找起來只感方法很笨拙，後來從研究平方

鏡反數的規律中得到啓發：何不以能回文的材料來炮製回文積等式？由此也可說明，錯用工具常會導至事倍功半。

(2)式是(1)式的推廣，生成數方法仍舊可用，例如當 $n=4$，只要找出適當的生成數 U_1，U_2，U_3，使

$A_1=U_1\cdot U_2\cdot U_3$，

$A_2=U_1\cdot U_2\cdot m(U_3)$，

$A_3=U_1\cdot m(U_2)\cdot U_3$，

$A_4=U_1\cdot m(U_2)\cdot m(U_3)\cdots\cdots\cdots$ (4)

一般地，當$n=2^k$，我們需要 $(k+1)$ 個生成數。不過，當這些生成數中有些是互爲鏡像關係時，即有$m(U_i)=U_j$，則以 $(k+1)$ 個生成數構作(2)式，只能有 $n<2^k$。例如在(4)式中，若有$m(U_2)=U_3$，則$A_1=A_4$，此時 n 只能是3。

以下是幾個實際的例子：

甲 由生成數12，21，1011，構作得

145584×485541

$=158544\times445851$

$=254772\times277452$

乙 由生成數12，102，1002，構作得

1226448×8446221

$=2146284\times4826412$

$=2416824\times4286142$

$=2449224\times4229442$

丙 由生成數12，21，1011，1000010001，乘得

$A_1=12\times12\times1011\times1000010001$

$=145585455985584$

$A_2=21\times12\times1011\times1000010001$

$=254774547974772$

$A_3=21\times21\times1011\times1000010001$

$=445855458955851$

$A_4=21\times21\times1101\times1000010001$

$=485545855895541$

$A_5=12\times12\times1101\times1000010001$

$=158545585598544$

$A_6=21\times12\times1101\times1000010001$

$=277454774797452$

其中$A_1 \times m(A_1) = A_2 \times m(A_2) = \cdots\cdots = A_6 \times m(A_6)$

讀者只要研究一下甲和丙的情形，便知道存在任意大的 K，使 n ($\geq 2^{k-1}$) 個互不相等的，也互非鏡像關係的自然數滿足(2)式。

值得一提的是，文獻[1]曾指出，引進無窮進制數的乘法的概念後，仿照構作(1)式的生成數法，還能構作出二次和三次的等冪和數組來。依此類推，使用無窮進制數的乘法，仿照構作(2)式之法，應能構作出二次和三次的連環等冪和數組來。事實證明這個類推是正確的，為省篇幅，這裏只列舉一二實例：

例一

$$
\begin{aligned}
&[2, 29, 139, 168, 262]_2\\
=&[3, 41, 112, 176, 268]_2\\
=&[4, 52, 84, 203, 257]_2\\
=&[6, 56, 73, 218, 247]_2\\
=&[8, 42, 86, 223, 241]_2\\
=&[12, 28, 119, 172, 269]_2\\
=&[14, 24, 107, 202, 253]_2\\
=&[16, 21, 143, 148, 272]_2
\end{aligned}
$$

這八個二次連環等冪和數組的生成數是（1，2），（2，3），（1，4），（1，7）。

例二

$$
\begin{aligned}
&[2, 27, 120, 136, 314, 330, 423, 448]_3\\
=&[3, 38, 80, 174, 276, 370, 412, 447]_3\\
=&[4, 48, 60, 203, 247, 390, 402, 446]_3\\
=&[6, 40, 67, 198, 252, 383, 410, 444]_3\\
=&[8, 30, 78, 191, 259, 372, 420, 442]_3\\
=&[10, 24, 87, 178, 272, 363, 426, 440]_3\\
=&[12, 20, 107, 144, 306, 343, 430, 438]_3\\
=&[15, 16, 118, 132, 318, 332, 434, 435]_3
\end{aligned}
$$

這八個三次連環等冪和數組的生成數是（1，2），（2，3），（1，4），（1，1，1，1），（1，5）。

按理，四次及以上的連環等冪和數組也應該是存在的，然而據筆者推測，要構作這樣高次數的連環數組，本文介紹的生成數法是無能爲力的。

後記：無論是回文積等式還是回文積連環等式，乍看之，要構造出來似乎是很艱巨的事情，甚至感到無從入手。然而一旦使用生成數法，立刻變成容易非常。回文積等式與等冪和數組，乍看之是風馬牛不相及，誰知二者竟有如此奇妙連繫，生成數法生產出回文積等式外，復可生產等冪和數組，這樣的副產品也真可愛。

研究數學問題就是這樣，總是「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村」，又或「同是長干人，生小不相識」，需要你鼓起勇氣「停舟暫借問」。

參考文獻

〔1〕李學數，《數學和數學家的故事》第七集，廣角鏡出版社，1997年版：89-107

〔2〕馬丁・加德納，《啊哈！靈機一動》，白英彩等譯，上海科學技術文獻出版社，1981年版：231-236

〔3〕David Wells(1997).*Curious and Interesting Numbers*, revised edition, England: Penguin Books LTD.