一道數學証解題的解評

袁金　安徽師範大學附中

1997 年 7 期《數學通訊》四川陶興模先生提供如下問題：

設 $x_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)(n \geq 3)$，證明或否定

$$\frac{x_2}{x_1}(x_3 + x_4 + \ldots + x_n) + \frac{x_3}{x_2}(x_4 + x_5 + \ldots + x_n + x_1) + \ldots + \frac{x_1}{x_n}(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}) \geq (n-2)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \quad \ldots\ldots(1)$$

證明：設 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$，則原不等式等價於

$$\frac{x_2}{x_1}(S - x_1 - x_2) + \frac{x_3}{x_2}(S - x_3 - x_2) + \ldots + \frac{x_1}{x_n}(S - x_1 - x_n) \geq (n-2)(S) \ldots\ldots(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1}(S - x_2) + \frac{x_3}{x_2}(S - x_3) + \ldots + \frac{x_1}{x_n}(S - x_1) \geq (n-1)(S) \ldots\ldots(3)$$

不妨設 $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$　則有 $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{x_2} \leq \ldots \leq \frac{1}{x_n}$

且　$S - x_1 \leq S - x_2 \leq \ldots \leq S - x_n$

構造矩陣

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} x_2(S-x_2) & x_3(S-x_3) & \cdots & x_n(S-x_n) & x_1(S-x_1) \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1(S-x_n) & x_2(S-x_{n-1}) & \cdots & x_n(S-x_1) \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

顯然 $\overline{A}$ 爲亂序陣，而 A 爲反序陣。
由微微對偶不等式，則有

* $F(\overline{A}) \geq F(A) = S - x_n + S - x_{n-1} + \ldots + S - x_1 = (n-1)S$

故原不等式獲証。

評注：首先指出，以上証明的後半段實際上即用了排序不等式中的 "亂序和 ≥ 反序和" 這一點。

另外本題還可看作是如下的 1984 年全國高中數學競賽題的一個反向。

原題是　　設 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1, 2, \ldots, n)$

試証 $\dfrac{x_2^2}{x_1} + \dfrac{x_3^2}{x_2} + \ldots + \dfrac{x_1^2}{x_n} \geq x_1 + x_2 + \ldots x_n$ ……(4)

而我們由 (3) 式可得

$$\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_1}{x_n} - n + 1\right)S \geq \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_1^2}{x_n} \quad \ldots\ldots(5)$$

[參考文獻]

1. 張運籌，微微對偶不等式，湖南大學出版社，1989。
2. 沈文選，矩陣的初等應用，湖南科學技術出版社，1996。

附記：讀題証明筆者初獲於 1997 年 8 月初，當時讀參考文所列的兩著作，証明受其啓發。所以用了矩陣表示，特此此說明

---

* 編者註:　　對於 2×n 矩陣 $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$,

$F(M)$ 定義爲 $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.