等冪和數組的一個有趣構造方法

黃志華

等冪和是數論中一個有趣的問題，筆者在業餘時間中，頗愛研究它，並曾得到一些小發現。承蒙李學數先生錯愛，在其新作《數學和數學家的故事第七集》中做了介紹。

然而一個問題常有多種不同的解決方法，筆者近期便發現了一個新辦法來構造等冪和數組，其方法與李學數先生在新作中介紹的有異曲同工之妙，且可以得更遠。饒有意思的是，這個新方法，還可以採用數形結合的方法哩！

所謂等冪和，是指有 2n 個不全相等 (最好是互不相等) 的正整數滿足如下的一系列等式：

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \\
&a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \\
&\dots\dots \\
&a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k \qquad \dots\dots(1)
\end{aligned}$$

像 (1) 式中的兩組數便形成 k 次等冪和，為書寫簡便，(1)式通常記成

$[a_1, a_2, \dots, a_n]_k = [b_1, b_2, \dots, b_n]_k$

要介紹筆者的新辦法，得由以下兩個三次等冪和式子說起，它們是：

$[24, 48, 86, 62]_3 = [26, 68, 84, 42]_3 \qquad \dots\dots(2)$

$[97, 71, 13, 39]_3 = [93, 31, 17, 79]_3 \qquad \dots\dots(3)$

李學數先生在其文章裏談到這兩個式子時，誤以為是筆者發現的，其實只是筆者從國內的數學雜誌上看到的。不過，筆者正是從這兩個式子悟出新的構作方法。

(2)、(3)的美妙之處是它的「數字結構」可用下圖表示：

(2)式是

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 6 \arrow[u] & 8 \arrow[l] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} 2 \arrow[d] & 4 \arrow[l] \\ 6 \arrow[r] & 8 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(3)式是

$$\begin{tikzcd} 9 \arrow[r] & 7 \arrow[d] \\ 3 \arrow[u] & 1 \arrow[l] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} 9 \arrow[d] & 7 \arrow[l] \\ 3 \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

從這種數字結構，筆者嘗試類推，例如若由

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad 和 \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \\ 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

又是否可以寫出三次等冪和數組來，經過驗證，果然有：

$[12, 23, 36, 65, 54, 41]_3 = [14, 45, 56, 63, 32, 21]_3$ ……(4)
再進一步，筆者發現由

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 7 \\ 9 & 11 \arrow[l] & 13 \arrow[l] & 15 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 3 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 7 \arrow[l] \\ 9 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & 13 \arrow[r] & 15 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

果然亦得到

$[103, 305, 507, 715, 1513, 1311, 1109, 901]_3 = [109, 911, 1113, 1315, 1507, 705, 503, 301]_3$ ……(5)

由於這種數字結構與置換的概念有些相似，湊巧的是，在這樣的三次等冪和中，置換與逆置換總是同時出現的。於是筆者索性把
(2)式簡記爲 $(2\ 4\ 8\ 6)_3$、
(3)式簡記爲 $(1\ 3\ 9\ 7)_3$、
(4)式簡記爲 $(1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)_3$、
(5)式簡記爲 $(1\ 3\ 5\ 7\ 15\ 13\ 11\ 9)_3$

這裡右下角的 3 字表示該置換裏的元素可以構作出三次等冪和數組。筆者並進而推測，應有：若 $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n+1}$ 皆是正整數，且是等差數列，則有
$(a_1 a_2 \ldots a_n\ a_{2n}\ a_{2n-1} \ldots a_{n+1})_3$

要證明這個命題，關鍵在於看到：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & a+d \arrow[d] \\ a+3d \arrow[u] & a+4d \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a+d \arrow[r] & a+2d \arrow[d] \\ a+4d \arrow[u] & a+5d \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & a+d \arrow[r] & a+2d \arrow[d] \\ a+3d \arrow[u] & a+4d \arrow[l] & a+5d \arrow[l] \end{tikzcd}$$

這三種置換都能各自以自己的元素構作出三次等冪和數組，而三者的關係，就像兩個四邊形「合併」成一個更大的四邊形。利用這「合併」的技巧，我們便可以運用數學歸納法証明上述命題的確是真的。不過，証明起來是頗繁瑣的，由於本文只打算作一簡介，惟有從略。

其實上述那個命題，內容還可以拓展得廣一點，而用這種類似置換的記號去研究其他次數的等冪和數組的性質，也可以得到好些有趣的結果，且留待有興趣的老師和學生去研究和發現好了。

寫到這裡，有些讀者可能不待筆者指出也早已注意到，(2)、(3)、(4)式都帶有回文的特點，是的，那麼四次以上的等冪和數組，可會有能回文的例子？答案是有的，筆者在下面列出自己所找到的由四次至七次的例子：

$[15, 26, 32, 43, 54, 61]_4 = [16, 45, 34, 23, 62, 51]_4$

$[13, 21, 36, 52, 67, 75]_5 = [57, 76, 25, 63, 12, 31]_5$

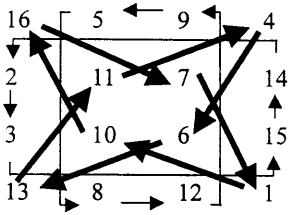
$[08, 19, 23, 25, 34, 36, 45, 47, 51, 56, 62, 67, 72, 73, 84, 90]_6 = [09, 48, 37, 27, 76, 26, 65, 15, 74, 54, 63, 43, 52, 32, 91, 80]_6$

$[05, 12, 25, 28, 40, 42, 57, 59, 71, 74, 87, 94]_7 = [49, 78, 47, 17, 95, 75, 24, 04, 82, 52, 21, 50]_7$

末了，筆者還想介紹自己在去年才發現的一個與四階幻方扯上關係的等冪和恒等式。所涉及的幻方是：

16	5	9	14
2	11	7	14
3	10	6	15
13	8	12	1

這個幻方是用「對角線法」構作出來的，而奇妙的是，若把這幻方上各個數字加上適當的置換箭頭（值得注意的是這些箭頭跟「對角線法」高度吻合！），可以據此寫出五個等冪和恒等式，其中四個是三次的，一個是由前四個組成的七次等冪和恒等式：



(1　10　16　7)
$[A + 10B, 10A + 16B, 16A + 7B, 7A + B]_3 = [B + 10A, 10B + 16A, 16B + 7A, 7B + A]_3$
(2　3　15　14)
$[2A + 3B, 3A + 15B, 15A + 14B, 14A + 2B]_3 = [2B + 3A, 3B + 15A, 15B + 14A, 14B + 2A]_3$

(5　8　12　9)
$[5A + 8B, 8A + 12B, 12A + 9B, 9A + 5B]_3 = [5B + 8A, 8B + 12A, 12B + 9A, 9B + 5A]_3$

(4　6　13　11)
$[4A + 6B, 6A + 13B, 13A + 11B, 11A + 4B]_3 = [4B + 6A, 6B + 13A, 13B + 11A, 11B + 4A]_3$

(1　10　16　7)(2　3　15　14)(5　8　12　9)(4　6　13　11)
$[A + 10B, 10A + 16B, 16A + 7B, 7A + B, 2A + 3B, 3A + 15B, 15A + 14B, 14A + 2B, 5A + 8B, 8A + 12B, 12A + 9B, 9A + 5B, 4A + 6B, 6A + 13B, 13A + 11B, 11A + 4B]_3 = [B + 10A, 10B + 16A, 16B + 7A, 7B + A, 2B + 3A, 3B + 15A, 15B + 14A, 14B + 2A, 5B + 8A, 8B + 12A, 12B + 9A, 9B + 5A, 4B + 6A, 6B + 13A, 13B + 11A, 11B + 4A]_3$

在這五個恒等式裡，A, B 是任二正整數。