

《九章算術》與小學數學教學

傅海倫 中國科學院自然科學史研究所

高級的算術教學在中國有著悠久的歷史。現在的小學高年級的一些主要教學內容在 2000 多年前的中國古代就有了系統的論述，並且成爲一部傳世之作的經典教材的《九章算術》的重要組成部分，對後世中國數學和數學教育的發展產生了深遠的影響。充分挖掘中國古代數學豐富知識寶藏和教育內容，繼承和發揚中華古算的思想和傳統，無異對於指導今天的數學教學具有重要的意義。

一、《九章算術》涉及當代小學數學教育的重要內容和思想方法

成書於公元前一世紀的《九章算術》是我國最重要的數學經典，它集先秦到西漢數學知識之大成，集中體現了當時中國數學領域的最高發展水平。全書以計算爲中心，基本上採取算法統率應用問題的形式。它的許多成就居世界領先地位，對中國後世的數學發展和數學教育產生了深遠的影響，奠定了此後中國數學居世界前列千餘年的基礎。《九章算術》成書後，注家蜂起，並有諸多創造。魏晉時期數學泰斗劉徽的《九章算術》注貢獻最大，影響深遠。

《九章》及其歷代注釋者在數學教育領域，內有許多值得我們學習的重要內容和見解。一般地說，《九章》並非當時的一本數學啓蒙教育著作，其內容遠遠超過了今天小學六年的教學要求，但隨著社會的長足進步和數學科學的迅速發展，前期的高深內容，到後期也許會成爲大眾化的基本內容。《九章》中的一些算術內容，對照今天小學數學的教學大綱，就已經成爲小學高年級教學的重要內容。《九章》中所體現一些數學思想和方法對小學生也具有重要啓迪和借鑒作用。現對此進行歸納，以便於教師在教學中認識和理解：

1. 十進位置值制記數法

我國是世界上最早產生並確立完善的十進位置值記數法的國家。早在四五千年前就有了數目字，商朝已掌握了 3 萬以內十進數目，以位置制記錄，這種記數法比古巴比倫的 60 進制、瑪雅人的 20 進制、羅馬人的 5 - 10 進制以及古埃及和希臘的十進非位置制優越得多。中國的十進位置制記數法被馬克思譽爲人類文明進程中“最美妙的發明之一”。劉徽在此基礎上創造了十進小數，外國直到 14、15 世紀才出現十進小數，小數點直至 17 世紀才開始使用。

2. 計算工具的發明

算籌是中國古代數學的一種獨特的計算工具，"算術"的意義即是運用算籌的技術，這恰當概括了中國古代數學使用算器、以算爲主的特點。《九章》是以算籌爲算具的數學教科書，算籌作爲當時世界上最靈巧的計算工具，使用起來既方便又準確，成爲在中國歷史上延續了1500年以上的科學傳統。元朝以後發展的珠算是籌算制的發展、改革和繼續。教師應認識籌算和珠算在世界數學發展史中的地位和作用，並具體在教學中發揮其獨特的教育功能。中國的籌算在沒有形成完備的口訣之前，主要是操作和擺數，籌算的這一特點，決定了其傳授過程中最簡便、最直接的方法就是"做中學"，這特別適合於兒童以演示、操作指導爲主的教學方法，符合兒童動作思維的心理特點，加之中國的數學歌訣有著悠久的歷史，利於兼用"唱"、"游"式的教學方法。數學歌訣的流行和不斷發展，對算法和算具的不斷改進，不僅推動了小學數學教育的發展，而且也直接影響著珠算的產生和發展。作爲中國文化寶庫中"貨真價實"的珍品--珠算和算盤，既是一種優越的計算工具，又是一種好的教具和學具，相比於外國用計算板、計算塊及小棒認識數和計算數，能夠更好地起到從具體到抽象的中介作用，有助於學生形成數位須序及數位大小等清晰的表象，從而提高學生認識數的能力。正因爲珠算的特殊價值和作用，在電子技術高度發達的現代商業圈中。在我國、日本及其他東南亞國家、珠算仍盛行不衰。此外，西方世界教育人士認爲珠算在數學教育中有其不能偏廢的特殊意義。

3. 分數四則運算及其應用

《九章》中的分數知識(包括約分、通分和加減乘除法則)已是當時世界上最系統、最完備的分數理論。在方田章中已有明確的分數運算法則，其他各章還有很多分數應用題。

(1) 分數加減法 分數加法稱爲合分；分數減法稱爲減分。其法則爲：以分數分子、分母交叉相乘，乘積相加減後的結果作爲"實"，以分母相乘作爲"法"，"實如法而一"，用今天的符號表示就是

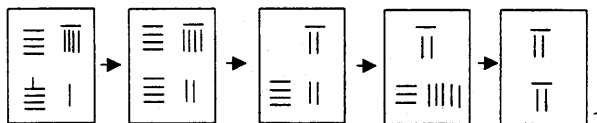
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}。 \text{如方田章第8題}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} = \frac{2 \times 7 \times 9 + 4 \times 3 \times 9 + 5 \times 3 \times 7}{3 \times 7 \times 9} = \frac{126 + 108 + 105}{189} = \frac{339}{189} = \frac{113}{63}。$$

這裡用到了通分，但沒有用到最小公分母，而是相加減後再約分，顯得比較繁瑣。少廣章則進了一步，其程序可以求出較小的公倍數，有的甚至就是最小公倍數。

(2) 分數乘除法 分數乘法稱為乘分，其法則是：以分母的乘積為分母，以分子的乘積為分子，同今天方法一樣： $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ 。分數除法稱為經分，其法則是把實和法通分，然後讓分子相除： $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$ ；後來劉徽又補充了一個更為簡便的法則：將法的分母、分子顛倒，與實相乘： $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ，這就是今天小學數學教材中的顛倒相乘。

(3) 分數約分法則 先進行觀察，若分子、分母都是偶數，則先除以 2，否則將分子、分母 "以少減多，更相減損"，最後得到 "等數"，此為原分子、分母的最大公約數。用等數約之，即把數化簡了。這種求等數的方法與歐幾里得求最大公約數的方法是一致的，現代算術教科書中的輾轉相除法即由此而來。應該指出，古人的計算方式是籌算而不是上述的現代筆算，例如，方田章第 6 問約簡 $\frac{49}{91}$ ，先用籌算求得 "等數" 7，以 7 除分子、分母，得最簡分數



以上是世界上最早的分數運算法則。大約 15 世紀歐洲才通行分數算法，印度到七世紀才有與中國相同的分數四則運算法則。了解我國古代的分數理論及其成就，教師可以從中吸取營養，來豐富自己的教學是很有益的，特別是分數乘法和除法法則的理由對今天小學教學仍有重要的指導意義。歷史上的分數概念及其運算的產生都先於小數，中外一理。而在教學順序上則小數先於分數，這是由於小數運算接近整數，較分數方便。安排教學程序則以可接受性優先，教師應心中有數。

4. 各種比例算法

《九章》粟米中的今有術，是完整的比例算法：已知所有數、所有率和所求率，則 所求數 = 所有數 × 所求率 ÷ 所有率

這個方法傳到印度和西方，叫做 "三率法" (rule of three)。在《九章》中，今有術所屬例題都是粟米互換問題。比如，已知粟率 50，糠米率 30，"今有粟一斗，欲為糠米，問得幾何？" 這裡 1 斗是所有數，50 和 30 分別是所有率和所求率，按今有術，得糠米： $10 \text{ 升} \times 30 \div 50 = 6 \text{ 升}$ 。這個問題就是現在小學課本中的比例問題，按現在的

解法是：

設所求的米為 x 升，

則有比例式 $50 : 10 = 30 : x$

$$\text{所以 } x = \frac{10 \times 30}{50}$$

即 $x = 6$

此外，《九章》中還有一些複雜的比例問題，如複比例問題，連鎖比例問題等等，但現在的小學數學課本中均已不再出現。對於各種比例問題，劉徽注以率為綱，結合齊同原理系統闡述，這些概念如果適當滲透到有關教材中去，將有利於教學。例如，劉徽提出“凡數相與者謂之率”，“相與”即“相關”之意，成率關係的數量同時擴大或縮小同樣的倍數，其率關係不變。若有甲、乙、丙三物之關係：甲：乙 = $a : b_1$ ，乙：丙 = $b_2 : c$ ，已知甲為 A ，問丙幾何？《九章》兩次應用今有術甲 A 化為乙 $B = \frac{Ab_1}{a}$ ，乙 B 化為丙 $C = \frac{Bc}{b_2} = \frac{Ab_1c}{ab_2}$

叫重今有術。劉徽認為可先把兩個率關係中乙率變成相同的值 b_1b_2 ，為保持率關係不變，則甲的率須變成 ab_2 ，丙的率須變為 cb_1 ，稱為與乙相齊，即甲：乙：丙 = $ab_2 : b_1b_2 : cb_1$ ，對甲、丙直接應用今有術： $C = \frac{Ab_1c}{ab_2}$ 。劉徽將此變換稱為齊同原理。它源於分數通分， $\frac{a}{b}$

與 $\frac{c}{d}$ 通分必須使分母相同： bd ，然後使分子與分母相齊，即分別變為 ad 、 bc ，兩分數變為 $\frac{ad}{bd}$ ， $\frac{cb}{db}$ 。這叫“齊其子，同其母”。

5、幾何初步知識

(1)、長方形面積概念：在《九章》方田章及其劉徽注中講得很生動。“方田術曰，廣從步數相乘得積步”。“方田”即長方的田，“廣”指長方形的底，“從”（即縱）指長形的高，“步”是長度的單位，所以長方形的面積等於底乘高。教師可以參照現行教材，古今對比，借以進一步領會其所以然。

(2)、三角形面積計算：“圭田術曰，半廣以乘正從”。三角形的田，古稱“圭田”，“正從”是指垂直於底的那個高，所以三角形的面積等於底乘高的一半。

(3)、梯形面積的計算：梯形的田稱“箕田”，同樣給出其面積等於上、下底相加與高相乘的一半。

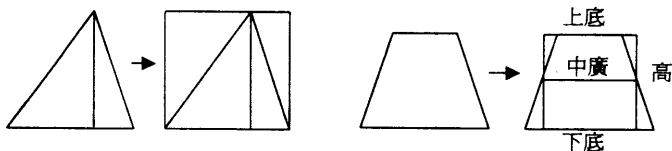
《九章》及其劉注中關於三角形、梯形面積公式借助於傳統的出入相補原理作出的。所謂出入相補，劉徽稱之為以盈補虛，按現代的說法，即：一個平面圖形移動前後，面積不變；一個平面圖形割

成若干塊，各塊面積之和等於原圖形面積（立體也同樣）。

三角形和梯形面積的公式都可根據長方形面積公式，利用出入相補原理而得到如

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$$

$$\text{梯形面積} = \frac{1}{2} \times (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} = \text{中廣} \times \text{高}$$



出入相補原理是中國古代用於處理面積、體積問題以及可以化為面積和體積問題的一種傳統方法，應用十分廣泛，方法直觀、巧妙，相當於給出證明，適應小學生的接受能力和心理特點，這對小學教學很有指導意義。

(4)、圓面積的計算：《九章》圓田術即給出圓面積公式。“圓田術曰，半周、半徑相乘得積步”。即圓面積等於 πr 乘以 r ，但當時的周徑比率取“周三徑一”由此得出的結果不精確。劉徽的割圓術不僅給出了圓面積公式的證明，而且在世界上第一次提出了計算圓周率精確近似值的程序和計算方法，他求得 $\pi = 3927:1250 = 3.1416$ 。據推測，祖沖之就是在此基礎上進一步將 π 值精確到 8 位有效數字的，領先世界千年之久，成為廣大炎黃子孫的自豪和驕傲。

(5)、《九章》商功章已有許多立體體積計算的“術”，如方柱、方錐，圓柱、圓錐等等都給出了體積公式，劉徽採用了“勾股術”、“出入相補”、“損廣補狹”等多種思想和方法給予解釋和證明，充分體現了中國數學家處理幾何問題的風格和特點，教師在教學中可給學生滲透或適當選用。

6、開發智力的“試題庫”

《九章》中有 246 個例題及其解法，其中不少算題可作為小學數學教學中課堂內外活動的採題題庫，這對開發學生智力，培養數學思想和方法具有重要的價值和意義。

二、《九章算術》對指導小學數學教學的局限性

以上所述，現在的小學高年級的一些主要教學內容在 2000 多年

前的中國古代就有了系統的論述，並且成爲一部經典教材的重要組成部份並開始向後人傳授，發揮著自身獨特的教育功能優勢；但是若以現在的眼光看歷史，以《九章》的內容、體系、思想和方法指導現代小學數學教學，又會暴露出自身的一些局限性，對此，教師應該有明確的認識。

首先，《九章》中的 246 個例題及其解法，絕大多數是當時生產生活中的實際問題，其學以致用的目的性，深刻地影響著後世中國數學和數學教育的發展。數學教學緊密聯繫實際，學以致用是中國教育史上的一個好傳統，但數學教學（包括小學數學教學）是一種規範的教育活動，教育的根本目的在於培養人，教育爲現實服務，主要是通過培養出適應社會發展需要的人才來現實的。作爲基礎教育的數學教學，特別是小學數學教學不僅要讓學生學習最基本的數學知識，同時發展他們智力，全面提高他們的素質。由於時代和環境的制約，《九章》顯然缺乏這種指導思想，因而也就難以更爲有效地發揮這種教育功能。

其次，《九章》的以實用爲目的的指導思想決定了它是一本以計算爲中心的算法體系的經典數學名著，這與古希臘注重邏輯理論體系的數學名著《幾何原本》旨趣迥異，途徑亦殊。《九章》的體系和指導思想與現代小學數學課本“以計算爲中心，其他各部內容配合計算出現”的教學體系是有所區別的。這是因爲現代小學課本和教學體系是以整數、小數、分數和成比例的數等概念的發展爲線索而展開的，計算要求則是各部分的共性，因而在客觀上就突出了計算的重點，但決不是純粹地傳授計算技能。

再者，《九章》根據問題性質和解題方法進行歸類，採取了以歸納爲主的表達方式，從知識體系的邏輯角度看，它們都屬於從個別到一般的歸納法體系，這與現代小學課本的表述形式有一定的相似之處。根據兒童思維發展年齡等特點，現代小學課本中的整數、小數和幾何初步知識的教學內容（中、低年級）一般都是先舉實例解答，然後歸納、概括出相應的概念、法則、公式，即由具體到一般的推理方式，易於低年級兒童接受，所以《九章》的歸納體系，有利於減少學習者的困難。但隨著兒童年齡的增長，知識的積累，培養高年級學生初步的邏輯推理能力就是先建立明確的分數概念，然後利用分數概念導出加、減、乘、除的計算法則，進而解答分數應用題，這樣就有利於進一步提高和發展兒童的邏輯推理能力。鑒於《九章》邏輯演繹體系的相對薄弱和困乏，這種教育功能很少能體現了。

三、結語

人類認識世界的過程是學生從未知到已知的學習過程的良好借鑒。數學史以其寓史於數，寓育於教，文理兼備，史哲共熔的特色，具有不可低估的教育價值。我國數學源遠流長，自成體系，有其特色，具有世界意義。數學教師們應該熟悉我們祖先的創造發明，不因爲當時敘述方法、表現形態、所用工具不同就在教學中不聞不問。在課堂內、外活動中應該有意識地用各級學生能夠接受的語言和方式向學生介紹有關內容，以具體事實說明中國歷來是數學大國。這樣做對於宏揚中華優秀文化，數典有祖，見賢思齊，對學生發奮圖強，樹立學習信心大有好處。同時，教師應正確評價和合理吸取歷史上的數學成果，結合現代數學教學特點和要求，以史爲鑒，古爲今用，不斷豐富自己的教學經驗，提高教學水平。

主要參考文獻

- [1] 郭書春等，《成就卓著的中國數學》，遼寧古籍出版社，1995 年版
- [2] 郭書春，《中國古代數學》，山東教育出版社，1991 年版
- [3] 王權，《中國小學數學教學史》，山東教育出版社，1996 年版
- [4] 駱祖英，《數學史教學導論》，浙江教育出版社，1996 年版
- [5] 《中國大百科全書·教育》，大百科全書出版社，1985 年版