古今中外勾股方圓

蕭文強　　香港大學數學系

1. 先來點題。《周髀算經》是現存中國最古老的天文及數學典籍，約成書於公元前 100 年，書的開首有以下一段話：

『商高曰：數之法出於圓方。圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩，以爲勾廣三、股修四、徑隅五。......此數之所生也。』

另一本數學古籍《九章算術》，約成書於公元前 100 年至公元 100 年之間，裏面載有不少幾何問題，其中卷一「方田」第 32 題問及已知直徑的圓田面積。後來三國時魏人劉徽爲《九章算術》作注(約於公元 250 年)，對這一題他說：

『凡物類形象，不圓則方。方圓之率，誠著於近，則雖遠可知也。由此言之，其用博矣。』

從這些話我們可以見到中國古代數學的一項特色，是以算爲主。但那並不是說中國古代數學只重算術不重幾何，反之，上面的話說明了方圓勾股乃中國古代幾何的基石。從開始算術與幾何即結合起來，這種數形結合的處理手法，與西方古希臘的傳統幾何互相輝映。我們藉著今天的數學知識回頭看看中外古今關於直角三角形(勾股)數學內容的探討，是可以得到啓迪的。

2. 《周髀算經》那段話，大意是說單位圓與它的外接正方形的周長之比是 3 (應作 π) 對 4。以 3 及 4 作邊做成的矩形，它的面積可以從計算長和闊的乘積得來。把矩形沿對角線折半即得出一個直角三角形，它的短邊 (勾) 是 3，長邊 (股) 是 4，斜邊 (弦) 是 5。三國時吳人趙爽作《勾股圓方圖注》有詳言：

『勾股各自乘，併之爲弦實，開方除之，即弦也。』

《九章算術》卷九「勾股」亦有明言：

『術曰：勾股各自乘，并而開方除之，即弦。』(見圖 1)

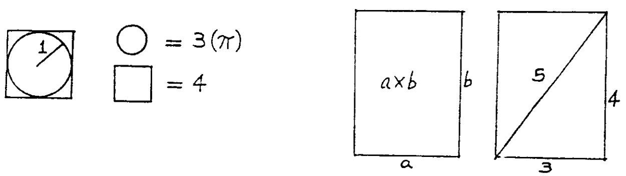

圖1

這道公式 (勾 ^{2} + 股 ^{2} = 弦 ^{2}) 叫做「勾股定理」，在西方叫做 Pythagoras 定理，相傳是由古希臘數學家 Pythagoras (公元前六世紀五世紀之交) 及其徒眾發現的。後人更渲染其事，說 Pythagoras 諸人十分重視這項發現，特地宰了一百頭牛向天神奉獻答謝，所以中世紀時這條定理被稱作「百牛定理」(Hecatomb Proposition)。在歷史上這條定理的名稱特別多，在不同時代不同地區都有不同名稱，包括「木匠定理」(Carpenter's Theorem)，「新娘之椅」(Bride's Chair) 和「驢橋定理」(Pons Asinorum)。（最後面的名字原本指等腰三角形底角相等這條定理，不知怎的，法國人卻喜歡把這個名字加諸 Pythagoras 定理的頭上!）

古希臘數學家 Euclid 在公元前 300 年左右編寫了著名的經典之作 ELEMENTS，卷一的第 47 定理就是 Pythagoras 定理：

『在直角三角形中，直角所對的邊上的正方形等於夾直角兩邊上正方形的和。』

卷一的第 48 定理是 Pythagoras 定理的逆：

『如果在一個三角形中，一邊上的正方形等於這個三角形另外兩邊上正方形的和，則夾在後兩邊之間的角是直角。』

第 47 和第 48 定理合起來說明了三角形三邊 a、b、c 的平方和關係 $a^2 + b^2 = c^2$ 界定了直角三角形。有趣的一點是：Euclid 用第 47 定理去證明第 48 定理。(讀者試做一做，做不出來的話可以找一本 ELEMENTS 讀一讀。) 其實，用第 48 定理也可以證明第 47 定理，因此在邏輯意義底下，這兩條互為逆命題的定理是等價的。雖然如此，這兩條定理敘述不同的事，重點有別。很多中學生沒有意會到這點，面對問題的時候，分不開他們需要運用的究竟是 Pythagoras 定理抑或是它的逆。(*)

(*)容許我打岔一下，在這兒做一個有趣的比較。ELEMENTS 卷一第 27 定理說：若兩內錯角相等，則兩直線平行。第 29 定理是它的逆，它說：若兩直線平行，則內錯角相等。(見圖 2)

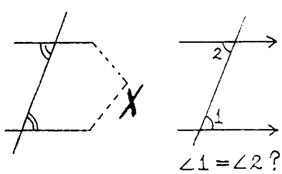

圖2

但 Euclid 並不是運用第 27 定理去證明第 29 定理。如果要那麼做，他可以設圖中 (見圖 3) 的角 2 大於角 1，構作直線 L 使角 4 等於角 1，則 L 不是 m，但由第 27 定理得知 L 和 n 平行，又已知 m 和 n 平行，那不就產生矛盾嗎？其實這隱藏了一項假設，即是沒有多於一條線與 n 平行。

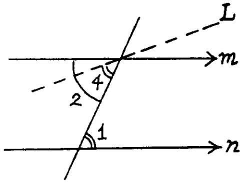

圖3

Euclid 證明第 29 定理的手法，是開門見山直接引用他開首定下的第五條公設，就是保證通過一直線外的一點不能有多於一條與該線平行的直線。這條第五公設在數學史上引起意義深遠的軒然巨波，是一段漫長曲折的故事，現暫擱下，結尾我們會回到這個問題。

3. 如果要選一條數學定理，它不單歷史悠久，在東西數學文化都曾出現，又具備深刻的數學內容，並且意味深長，以致歷久彌新，是眾多新舊數學理論的泉源，那麼勾股定理是當然首選了！由於它是如此基本和重要，人們很早便注意到這個結果，所以自古以來便在各民族的數學文化中出現。

傳說中古埃及人以 3、4、5 結繩求作垂直線，但沒有實據證明確有其事。不過垂直概念是古已有之，看看現存最古老的古埃及數學文獻 Rhind 紙莎草紙抄本便知道。抄本約書於公元前十七世紀中葉，據云抄自公元前十九世紀的另一抄本，距今可是將近 3800 年了。其中第 49 題提及矩形面積的計算，第 51 題提及三角形面積的計算，二者均涉及垂直概念。

古代巴比倫人以泥版書寫，有不少保存完好到今天還能讀到，大都是公元前二十世紀至公元前十七世紀的文物。其中有兩塊著名泥版與勾股定理有關：

(1) 編號 YBC 7289 泥版，現藏於美國 Yale University，上面畫了一個正方形和它的兩條對角線，正方形邊上刻上以楔形文字記載的數字 30，對角線上也刻上兩個數字，其一是

$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60\times 60}+\frac{10}{60\times 60\times 60}\approx 1.4142129...$，另一是 $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60\times 60}\approx 42.4263888...$。不難猜到前者是 $\sqrt{2}$，後者是 $30\sqrt{2}$，即是對角線的長度。引人入勝的研究課題是古代巴比倫人如何計算至這種精確度。

(2) 編號 Plimpton 322 泥版，現藏於美國 Columbia University，上面刻了幾列數字。最先沒有人看出箇中玄妙，以爲那是普通商業賬目而已。後來數學史家 Neugebauer 和 Sachs 專心鑽研，發覺那竟然是一個構作邊長是正整數的直角三角形的數表！例如第一行的 119 和 169 滿足 $119^2+120^2=169^2$，又例如第五行的 65 和 97 滿足 $65^2+72^2=97^2$。更有趣的是第一行至第十五行，每行相應的直角三角形，正好是其中一角逐漸由約 45 度增至約 60 度。

還有一塊不知日期的泥版，上面畫了以下的圖(見圖 4)，

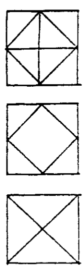

圖4

很有意思，下面會再提及。

古代印度以梵文書寫的宗教典籍 VEDANGAS 有些附篇叫做 SULBASUTRAS (約公元前九世紀)，指示如何建造神壇等等。當中記載了兩道問題：(1) 已知兩個正方形，求作一正方形，面積等於那兩個正方形的和。 (2) 已知兩個正方形，求作一正方形，面積等於那兩個正方形的差。讀者看見下面的圖，可自行證明之(見圖 5)。也要運用勾股定理。

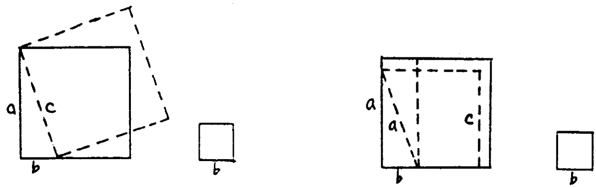

圖5

4. 現在讓我們看看 Euclid 如何在 ELEMENT 卷一證明勾股定理。多數人在課本上都讀過這個證明，運用的只是全等三角形的知識，雖云簡單，但構作那條補助線，卻予人"天外飛來一筆"的突兀感覺。十七世紀英國哲學家 Hobbes 有一天在朋友書房看到案頭打開的書，正好翻開 ELEMENTS 卷一第 47 定理證明那一頁，他不經意看了一眼，卻被它吸引了，心裏想怎麼可能呢？於是按指示查看證明步驟中用了甚麼之前的定理，翻回前面又發現需要再追查之前的定理。如此這般他竟讀完了卷一，並且愛上了幾何！

圖中的直角三角形是 ABC，角 A 是直角。(見圖 6)

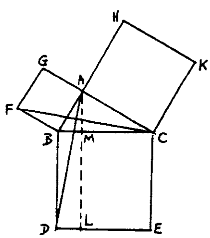

圖6

從 A 構作垂線 AML，先證明三角形 CFB 和三角形 DAB 全等，因此正方形 ABFG = 2×三角形 CFB = 2×三角形 DAB = 矩形 BDLM；類似地證明正方形 ACKH = 矩形 CELM。因此正方形 ABFG 與正方形 ACKH 的和等於矩形 BDLM 與矩形 CELM 的和，即是正方形 BCED。

公元四世紀希臘數學家 Pappus 把這條定理推廣了，不限於直角三角形，但也就不能只用正方形而需要推廣至平行四邊形：在三角形 ABC 的兩邊 AB、AC 各作一平行四邊形 ABFG 和 ACKH，FG 和

KH 延長相交於 Y，聯結 YA，構作平行四邊形 ABNY 和 ACMY，則 BCMN 是一個平行四邊形，面積等於平行四邊形 ABFG 和 ACKH 的和。(見圖 7)

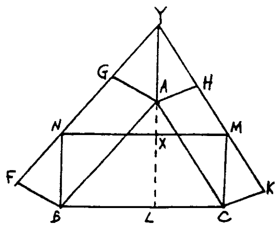

圖7

證明的基本思想與前述 ELEMENTS 卷一第 47 定理的證明無異 (把 YA 延長與 BC 相交於 L，與 NM 相交於 X，考慮平行四邊形 BLXN 和 CLXM)。

倒是 ELEMENTS 卷六第 31 定理的證明頗富新意，定理的內容基本上仍舊是 Pythagoras 定理：

『在直角三角形中，對直角的邊上所作的圖形等於夾直角邊上所作與前圖形相似且有相似位置的二圖形的和。』

證明運用了相似三角形的知識，只用構作垂線 AD (見圖 8)，

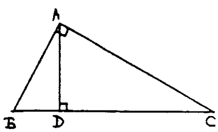

圖8

由於三角形 ABD 和 CBA 相似，有 CB:BA = AB:BD，故 CB.BD = BA^2；由於三角形 CAD 和 CBA 相似，有 BC:AC = AC:DC，故 BC.DC = AC^2。因此，$BA^2 + AC^2$ = CB.BD + BC.DC = BC(BD + DC) = BC^2。讀者可以看到，結尾一筆與第 47 定理的證明無異，CB.BD + BC.DC

就是兩個矩形的和。但導致 CB.BD = BA^2 和 BC.DC = AC^2 的方法卻與先前大異其趣，其中倚仗比例理論，毫不簡單，內裏可是大有文章。比例理論的發展，是近廿年來希臘數學史研究的一項突破，Knorr 和 Fowler 提出了與傳統希臘數學史研究大不相同的見解，激發深思和爭論，在這兒不能詳作介紹了。注意一點：比例理論在公元前四世紀末是高深的理論，ELEMENTS 卷五的闡述是公元前四世紀中葉數學家 Eudoxus 的創作，有了這套理論才可以開展相似形的討論，在卷六才可以靠它證明勾股定理。然而勾股定理太重要了，Euclid 有需要把卷六的證明作技術性修訂，讓它早早在卷一出現，以便在其後幾卷運用。比較卷一第 47 定理和卷六第 31 定理的證明，可以看到 Euclid 費的一番心思。甚至有人指出卷一各定理之鋪陳，是爲了那結尾一擊：Pythagoras 定理的證明。細心研讀 ELEMENTS 卷一，是很有啓示的！

卷六第 31 定理的證明也是法國數學家 Legendre 在他的課本 ELEMENTS DE GEOMETRE 用的證明。該課本自 1794 年面世後很受歡迎，以後陸續出了好幾個版本。Legendre 沒有採用原來 ELEMENTS 那種嚴格公理化處理方式，較多靈活運用代數計算，把各定理次序重新編排，讓讀者學起來更順暢。就以證明勾股定理爲例，他的寫法很像今天的計算(見圖 9)：

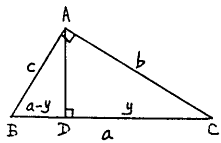

圖9

$\dfrac{b}{y}=\dfrac{a}{b}$，故 $b^2 = ay$；$\dfrac{c}{a-y}=\dfrac{a}{c}$，故 $c^2 = a^2 - ay$，因此
$b^2 + c^2 = ay + a^2 - ay = a^2$。

美國西點軍校數學系系主任 Davies 在 1858 年把 Legendre 的書譯成英文，成爲十九世紀期間美國最流行的幾何教本，至本世紀初猶不衰。「Davies 的 Legendre」幾乎成爲幾何學的同義詞呢！不知道

是否受到「Davies 的 Legendre」之影響，美國第 20 任總統 Garfield 未做總統前（擔任教師工作）曾經發表了一則勾股定理的簡短證明，刊登於 NEW ENGLAND JOURNAL OF EDUCATION VOL III (1876 年)上面(見圖 10)，用的也是代數手法，頗見機智：

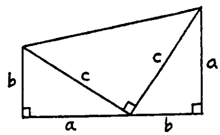

圖10

$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=$ 梯形面積，因此有 $ab+\frac{c^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+ab$，從而 $c^2=a^2+b^2$。

以上描述了勾股定理的好幾個證明，但仍有很多其他證明。在 1927 年美國數學家 Loomis 寫了一本書，叫做 THE PYTHAGOREAN PROPOSITION。共舉了 370 個證明！美國數學教師協會 (NCTM) 在 1968 年把該書重印發行，有興趣的讀者可以找來看看自己想出來的證明是否已有前人做了？

在這兒讓我再舉三個古代東方數學典籍記載了的證明：

(1) 《周髀算經》說的一段話：

『既方之外，半其一矩，環而共盤，得成三四五，兩矩共長二十有五，是謂積矩。』

可以解釋爲以下的證明(見圖 11)

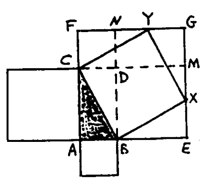

圖11

AFGE = CDNF + BEMD + 2 × ABDC，
AFGE = BXYC + 4 × ABC = BXYC + 2 × ABDC，
因此，CDNF + BEMD = BXYC。

(2) 劉徽注《九章算術》卷九「勾股」說的一段話：

『勾自乘爲朱方，股自乘爲青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也，合成弦方之冪。』

提供另一個拼砌圖形的證明(見圖 12)。

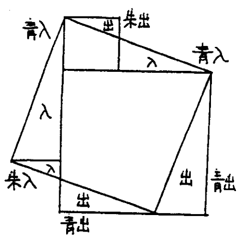

圖12

(3) 公元九世紀阿拉伯數學家 Thabit ibn Qurra 給出的拼砌法 (見圖 13a) 是 (2) 的一個變奏。其實，把一個方格圖重疊在大小兩個正方形組成的圖上面，再作不同移度的上下左右移動，可以得到無窮多種這樣的「出入相補」拼砌方案呢(見圖 13b)。

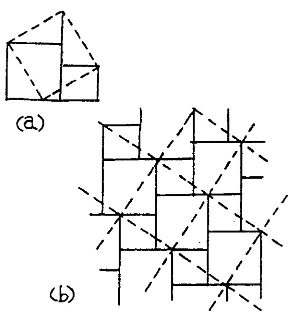

圖13

5. 古人如何發現勾股定理呢？無從稽考矣。最有可能是由觀察特殊情況開始，例如觀察等腰直角三角形 (見圖 14a)。印度文獻 SULBASUTRA 有說：

『橫跨正方形的弦產生一個大一倍的正方形』，
意思也是說等腰直角三角形的勾股性質 (見圖 14b)。

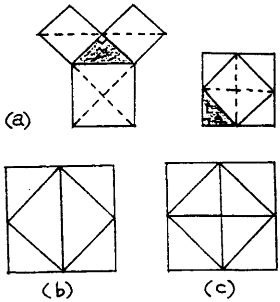

圖14

公元前 400 年左右 Plato 的著述引用 Socrates 誘導童僕構作一個比原正方形大一倍的正方形這個故事，也是用了等腰三角形的勾股性質 (見圖 14c)。大家還記得在第 3 節提到的巴比倫泥版嗎？不就是這個圖案嗎？

古人也早便懂得運用勾股定理去解決問題，讓我只舉兩個例子。

(1) 有一個著名的問題，在中國和印度的典籍都以同樣形式出現。
《九章算術》卷九第 6 題說：

> 『今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊。問水深、葭長各幾何？』

同一題亦見諸南宋楊輝的《詳解九章算法》(1261 年)「勾股」第 9 題。明代程大位著《算法統宗》(1592 年) 把該題 (修改了數據) 收入於卷十六第 26 題，而且調寄詞牌「西江月」：

> 『今有方池一所，每邊丈二無移。中心蒲長一根肥，出水過於二尺。
> 斜引蒲稍至岸，適然與岸方齊。請君明算更能推，蒲長水深各幾？』

無獨有偶，古代印度數學家 Bhaskara (公元十二世紀，也把這個問題冠以詩情畫意的文字：

> 『紅鵝聚居的湖上，荷花嫩芽出水九吋。忽來狂風一陣，吹倒荷花到水面，離根三呎。精於數學的朋友呀，請快算出湖深若干？』

(我沒有看到原文，即使看到亦無能耐把詩文的神韻翻譯出來。)
學過勾股定理的中學生，不難解答這個問題。

看一看劉徽如何解釋《九章算術》卷九第 6 題出現的公式

$$股 = \frac{勾^2 - (股弦差)^2}{2 \times 股弦差},$$

更能幫助學生活躍幾何思路。他的解釋基於下面的圖 (見圖 15)，可謂一目了然。

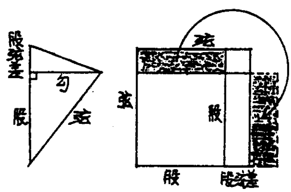

圖15

(2) 勾股三元數組的尋覓，自古以來是數學家極感興趣的問題。就是說，尋找三元 (正) 整數組(a, b, c)，使邊長為 a、b、c 的線段合成一個直角三角形，即是 $a^2 + b^2 = c^2$。在第 3 節介紹過的巴比倫泥版 Plimpton322 是一個叫人讚嘆不已的早期例證。據說 Pythagoras 本人已經知道$(\frac{m^2-1}{2}, m^2, \frac{m^2+1}{2})$ 是個勾股三元數組，因為那個時代的希臘數學家對「圖形數」有偏好，看到下面的方形數組合，是有理由導致這個發現的 (見圖 16)。

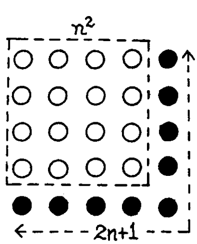

圖16

$m^2 = 2n + 1$，即 $n = \frac{m^2-1}{2}$，則由圖中見到 $n^2 + m^2 = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$，故 $n + 1 = \frac{m^2+1}{2}$。

中國古代數學的勾股理論結合了代數和幾何，也就自然想到直角三角形的邊長 a、b、c 的比率。把這些比率表爲某兩個整數的有理式，就相當於給出勾股三元數組了。中國數學家還把那兩個整數賦予幾何意義，從而提供巧妙的直觀解說。讓我們看看《九章算術》卷九第 14 題：

『今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙東行，甲南行十步而邪東北與乙會。問甲乙行各幾何？』

意思是說，在直角三角形中，邊爲 $a = 10$，另一邊爲 b，斜邊爲 c，也知道 $a + c : b = m : n\ (m = 7, n = 3)$，求 a、b、c。按照術文，用今天數學語言表述，就是

$$a : b : c = \frac{1}{2}[(a+c)^2 - b^2] : (a+c)b : \frac{1}{2}[(a+c)^2 + b^2]$$
$$= \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2),$$

故 $a : b : c = \frac{1}{2}(49-9) : 21 : \frac{1}{2}(49+9) = 20 : 21 : 29$。今 $a = 10$，故 $b = 21/2 = 10\frac{1}{2}$，$c = 29/2 = 14\frac{1}{2}$。

由此可見勾股三元數組 $(\frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2))$ 中的參數 m, n 的幾何意義是直角三角形的勾弦和與股的比率。再看劉徽注的解釋 (見圖 17)，就更叫人嘆爲觀止了！

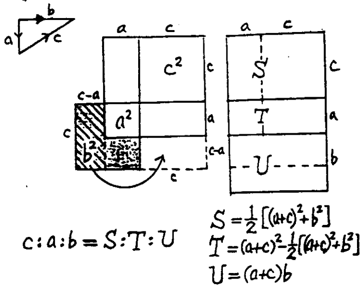

圖17

6. 勾股定理解釋了直角三角形的邊長關係，換了不是直角三角形怎辦？顯然我們可試圖把三角形分割成直角三角形考慮，最簡單不過莫如通過一個頂點構作垂直於對邊的直線，把三角形分成兩個直角

三角形。古人也想到如此，所以 Euclid 的 ELEMENTS 卷二第 12(和第 13)定理便是說：

『在鈍角(銳角)三角形中，鈍角(銳角)對邊上的正方形比夾鈍角(銳角)的二邊上的正方形的和大(小)一個矩形的二倍。那個矩形的一邊是含該鈍角(銳角)的一邊，另一邊是由另一銳角向該對邊的延長(該對邊)作垂線，垂足到原鈍角(銳角)之間的一段。』(圖18)

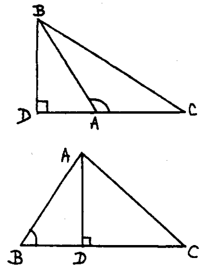

圖18

請讀者自行運用勾股定理去證明這兩回事。大家自然認得這兩道公式可以歸結成一道公式，即是餘弦法則：三角形的三邊是 a、b、c，邊長為 c 和 a 的夾角是 B，則 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$。邏輯上餘弦法則等價於勾股定理，互相推演可得。公元二世紀希臘數學家 Ptolemy 因研究天文學開展了(球面)三角學的研究，至 13 世紀阿拉伯數學家 Nasir ad-Din al-Tusi 而大盛，其間勾股定理乃不可缺少的要素。

餘弦法則看似涉及長度及角度兩個概念，其實二者能作統一處理，就是高等數學中的內積概念。從這觀點表述，勾股定理忽地變成「平凡」，它只是內積定義帶來的邏輯後果而已！懂得內積空間的讀者自然知道對向量 $\underline{a}$、$\underline{c}$ 和 $\underline{b} = \underline{a} - \underline{c}$ 來說，$b^2 = \underline{b}\cdot\underline{b} = (\underline{a} - \underline{c})\cdot(\underline{a} - \underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{a} + \underline{c}\cdot\underline{c} - 2\underline{a}\cdot\underline{c} = a^2 + c^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{c}$；那就是由 $\underline{a}$、$\underline{b}$、$\underline{c}$ (經適當平移) 組成的三角形的餘弦法則，$\underline{a}\cdot\underline{c}$ 就是 $ac\cos B$ 了。$\underline{a}\cdot\underline{c} = 0$ 等於說三角形是直角三角形 $(B = \pi/2)$，上式化為勾股定理。雖然在這種表述下勾股定理變得「平凡」，但這是另一個起點，現代數學眾多理論均以此為基石。現代數學中的解析幾何結合了代數和幾何，憑著勾股定理帶來度量 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 以至它的推廣，居功至偉，不容忽視。要是讀者追問一下，內積如何定義，自然又得回溯源頭返到勾股定理了。

臨到結尾，我想呼應第 2 節岔筆提到那回事 - 平行公理。曾經有些人提議用勾股定理的圖形及公式跟外太空有智慧生物溝通，那是假定了外太空生物處於的世界，跟我們處於的 (局部) 世界一般，服從歐氏幾何，即是說，通過直線外任何一點有且僅有一條線與原來直線平行。如果外太空生物活在非歐幾何世界裏，直角三角形的三邊並不滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ 這個關係呢！例如在球面幾何，存在直角三角形，它的三邊滿足 $a^2 + b^2 = 2c^2$ (其實 $a = b = c$) (見圖 19)。

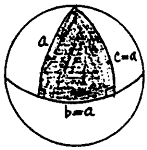

圖19

在雙曲幾何，公式就看似更複雜了，是

$$c^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^4}{12} + \frac{b^4}{12} + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{c^4}{12} + \dots$$

其實，在雙曲幾何中「勾股定理」的公式仍然是十分優美的，但要以別的形式表述，例如利用雙曲餘弦函數 cosh (= hyperbolic cosine)，直角三角形的三邊 a、b、c 滿足 $\cosh c = \cosh a \cosh b$。(雙曲餘弦函數與普通餘弦函數，有相似之處但亦有相異之處，這裏不能詳述了。)平行公理有不少等價的幾何敘述，其中一個就是勾股公式 $a^2+b^2 = c^2$！

7. 我企圖引用眾多例子說明勾股方圓在古今中外佔的重要地位。有興趣的讀者可以找原來的典籍查閱細讀，自會感覺到那份貫通古今中外的情懷，從而尊重人類文化歷史的進程，這樣的話，勾股定理的意義，就不只是 $a^2 + b^2 = c^2$ 那麼簡單了。