

「九點共圓」前傳：六點共圓的證明

梁子傑
退休中學教師

楔子

所謂「九點共圓」就是指，對於任何三角形，三角形三邊的中點、三個垂足和三個由頂點至垂心的中點，合共九點，都必定落在同一圓之上。雖然這是一條十分漂亮的定理，但單單是「九點共圓」這四個字已經嚇怕了不少的人，更何況那三個「由頂點至垂心的中點」，更令初學者望而卻步。

既然如此，那麼我們為何不放棄那三個「由頂點至垂心的中點」，轉而著眼於三角形三邊的中點和三個垂足六點共圓的證明呢？

問題提出

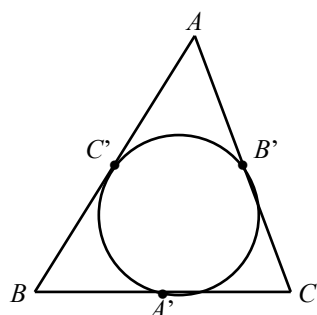


圖 1

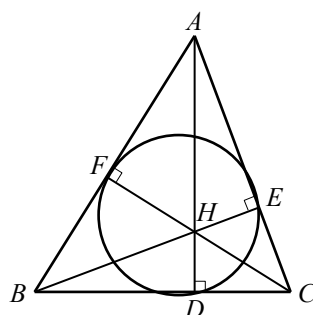


圖 2

圖 1 中， A' 、 B' 和 C' 分別為 BC 、 AC 和 AB 的中點。圖 2 中， D 、 E 和 F 分別為由頂點 A 、 B 和 C 畫向對邊的垂足（而 H 為垂心）。眾所周知，必定能作一個圓通過給定的三個非共線點，因此可以在圖 1 和圖 2 中，分別畫出通過 A' 、 B' 和 C' 與及 D 、 E 和 F 的外接圓。仔細比較兩圖，大家有沒有發覺， $A'B'C'$ 的外接圓與 DEF 的外接圓其實是同一個圓呢？事實上， $A'B'C'$ 的外接圓會通過垂足 D 、 E 和 F ，相反， DEF 的外接圓亦會通過中點 A' 、 B' 和 C' 。換言之， A' 、 B' 、 C' 、 D 、 E 和 F 六點共圓！

無論大家是否察覺 A' 、 B' 、 C' 、 D 、 E 和 F 六點共圓，我們也可以透過數學證明來證實這一點。首先，大家不要被「六點共圓」這四個字嚇怕。

所謂的「六點共圓」，也只不過是從「四點共圓」做起的。即是說，我們可以從上述六點中，先抽取四點出來，證明它們共圓，然後再按相同的道理，證明其餘兩點也與前面四點共圓。

留意，由於那六點不是三角形的中點便是三角形的垂足，因此從六點中抽取四點，只可分成以下 4 種情況：

1. 3 個中點與 1 個垂足（例如： A' 、 B' 、 C' 和 D ）
2. 3 個垂足與 1 個中點（例如： D 、 E 、 F 和 A' ）
3. 2 個中點與 2 個垂足，其中 1 個中點和 1 個垂足在同一邊，另一個中點和另一個垂足也在另一條相同的邊（例如： A' 、 B' 、 D 和 E ）
4. 2 個中點與 2 個垂足，其中 1 個中點和 1 個垂足在同一邊，其餘兩點在不同的邊上（例如： A' 、 B' 、 D 和 F ）

當然，證明了這 4 個情況中的其中一個，已經足夠證明六點共圓。但一則為了滿足好奇心，二則為了考驗自己，所以為上述 4 個情況寫出各自的證明。同時，為了令討論變得流暢，先假設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形。對於直角和鈍角三角形六點共圓證明，會留待稍後在總結中討論。

A' 、 B' 、 C' 和 D 四點共圓的證明

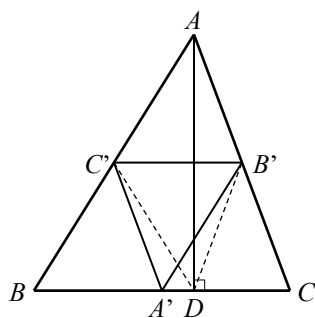


圖 3

若 A' 、 B' 和 C' 分別為 BC 、 AC 和 AB 的中點，則從中點定理可知 $A'B' \parallel AB$ 及 $A'C' \parallel AC$ 。所以圖 3 中的 $AC'A'B'$ 為一平行四邊形。由此得 $\angle C'A'B' = \angle A$ （平行四邊形對角）。因此只要證明 $\angle C'DB' = \angle A$ ，那麼便可知道 A' 、 B' 、 C' 和 D 四點共圓了。

留意 $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\triangle ADC$ 為直角三角形， B' 為 $\triangle ADC$ 斜邊的中點。
由此得， B' 為半圓 ADC 的圓心， $B'D = B'C$ （半徑）。因此， $\angle B'DC = \angle C$
（等腰 $\triangle$ 底角）。類似地， $\angle C'DB = \angle B$ 。

$$\begin{aligned}\therefore \quad \angle C'DB' &= 180^\circ - \angle B - \angle C && \text{（直線上的鄰角）} \\ &= \angle A && \text{（}\triangle \text{內角和）} \\ &= \angle C'A'B'\end{aligned}$$

所以 A' 、 B' 、 C' 和 D 四點共圓（同弓形上圓周角的逆定理）。

細心想想，其實有一個更快捷、更漂亮的方法來證明這個情況。圖 4 中，利用同樣的方法可以知道， $C'A'CB'$ 為一平行四邊形。因此

$$\begin{aligned}\angle B'DC &= \angle C && \text{（等腰 }\triangle \text{底角）} \\ &= \angle A'C'B && \text{（平行四邊形對角）}\end{aligned}$$

即四邊形 $A'DB'C'$ 的外角 $\angle B'DC$ 等於其內對角 $\angle A'C'B$ ，所以 A' 、 B' 、 C' 和 D 四點共圓。

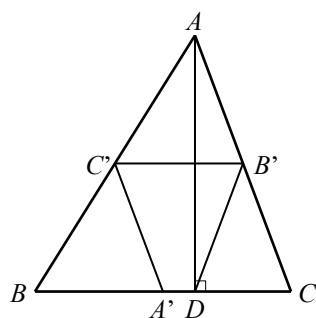


圖 4

這個證明是漂亮的，它的不單證明了 $A'DB'C'$ 是一個圓內接四邊形，而且由於 $C'A'CB'$ 為一平行四邊形， $C'A' = B'C = B'D$ ，因此我們更可知道 $A'DB'C'$ 是等腰梯形！不講不知，原來在每一個隨意繪畫的三角形中，它總會隱藏著不少對稱的四邊形！

D 、 E 、 F 和 A' 四點共圓的證明

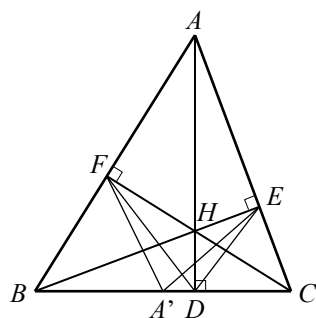


圖 5

圖 5 中， D 、 E 和 F 為垂足， H 為垂心。由於圖中有很多直角，因此從同弓形上圓周角的逆定理和四邊形對角互補這兩個條件，我們知道圖 5 中其實充滿四點共圓的現象，例如： $BFEC$ 、 $BFHD$ 和 $CEHD$ 皆為圓內接四邊形。由此亦得 $\angle HDF = \angle HBF = \angle HCE = \angle HDE$ （同弓形上圓周角）！為了方便以後的討論，我們稱這些角為 α 。注意： $\angle FDE = 2\alpha$ 。

另外，再由於 $\triangle BFC$ 和 $\triangle BEC$ 為直角三角形， A' 為 BC 的中點，即 A' 亦為半圓 $BFEC$ 的圓心，因此

$$\begin{aligned}\angle FA'E &= 2\angle FBE && \text{（圓心角兩倍於圓周角）} \\ &= 2\alpha = \angle FDE\end{aligned}$$

所以 D 、 E 、 F 和 A' 四點共圓（同弓形上圓周角的逆定理）。

A' 、 B' 、 D 和 E 四點共圓的證明

A' 、 B' 、 D 和 E 四點共圓的證明須分成兩個情況。

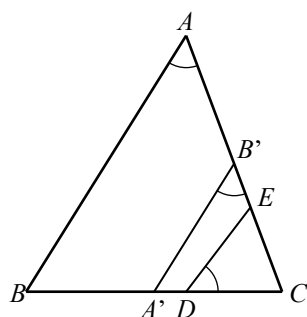


圖 6(a)

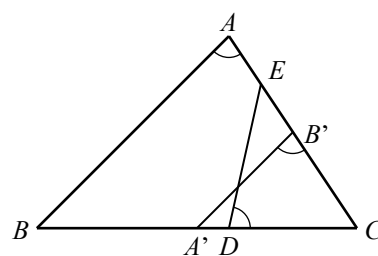


圖 6(b)

圖 6(a) 中，線段 $A'B'$ 與線段 DE 在 $\triangle ABC$ 的範圍內並不相交。圖 6(b)

中，線段 $A'B'$ 與線段 DE 在 $\triangle ABC$ 的範圍內有交點。不過，無論在哪一個情況下，由前面的討論知道， $A'B' \parallel AB$ 且 $ABDE$ 為圓內接四邊形。

$$\begin{aligned} \text{因此，} \quad \angle A'B'C &= \angle BAC && (\text{同位角；} A'B' \parallel AB) \\ &= \angle EDC && (\text{圓內接四邊形外角}) \end{aligned}$$

所以，在圖 6(a) 中， A' 、 B' 、 D 和 E 四點共圓（外角 = 內對角）。而在圖 6(b) 中，由上式可得 $\angle A'B'E = \angle A'DE$ （直線上的鄰角）。所以， A' 、 B' 、 D 和 E 亦四點共圓（同弓形上圓周角的逆定理）。

這個證明亦反映出一個道理，就是同弓形上圓周角和圓內接四邊形外角兩個定理，看似並不相同，但它們之間卻隱藏著一個微妙的關係。

A' 、 B' 、 D 和 F 四點共圓的證明

A' 、 B' 、 D 和 F 四點共圓的證明亦須分成兩個情況，但以下只會討論 $A'F$ 與 $B'D$ 不相交的情況。至於相交的情況，由讀者自行補充。

留意，在圖 7 中， $\triangle AFC$ 、 $\triangle BFC$ 和 $\triangle ADC$ 皆為直角三角形。與前面討論過的情況相似，我們不難證明 $\angle B'FA = \angle A$ ， $\angle A'FB = \angle B$ 及 $\angle B'DC = \angle C$ 。由此得

$$\begin{aligned} \angle B'FA' &= 180^\circ - \angle B'FA - \angle A'FB \quad (\text{直線上的鄰角}) \\ &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ &= \angle C && (\triangle \text{ 內角和}) \\ &= \angle B'DC \end{aligned}$$

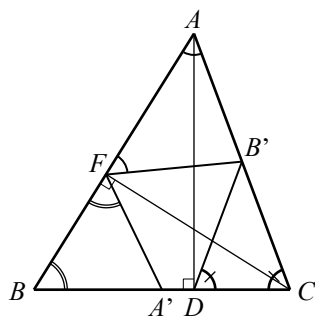


圖 7

所以 A' 、 B' 、 D 和 F 四點共圓（外角 = 內對角）。

總結

有前輩和朋友曾經說過，九點共圓雖然是一條漂亮的定理，但放在中學課堂上就太過深奧，只會嚇怕學生。不過，當研究六點共圓的證明時發覺，六點共圓問題卻是一個內容豐富的課題，它不單為我們提供了不少應用四點共點來做證明的練習，而且證明的過程亦同時幫學生溫習之前學習過的數學工具，確實是一舉多得。當然，把這些問題轉化成學生的習題時，教師必須對學生的程度和能力有所掌握，為他們提供準確的插圖和適當的提示，方能達到理想的教學效果。

前面的全部證明都在假設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形的情況下而寫成的。那麼當 $\triangle ABC$ 為直角或鈍角三角形時又如何？

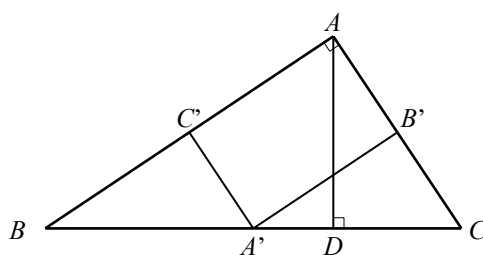


圖 8

圖 8 展示一個直角三角形 ABC ，其中 $\angle A$ 為直角。在這三角形中，垂足 E 和 F （甚至是三角形的垂心 H ）將會重疊於 A ，於是六點共圓的問題便變成要證明 A 、 A' 、 B' 、 C' 和 D 五點共圓的問題。但由中點定理和 $\angle A = 90^\circ$ 可知， $AB'A'C'$ 為長方形。再由於 $\angle ADA' = 90^\circ = \angle AB'A'$ ，因此 A 、 A' 、 B' 、 C' 和 D 便成五點共圓了。

至於鈍角情況的證明，其實與銳角的差不多，但要小心選取的點與那個鈍角的關係。以 3 個垂足與 1 個中點的證明為例，若 $\angle A$ 為鈍角，則選取的中點為 A' 和選取的中點為 B' 是有分別的，必須分開兩個情況來考慮。

圖 9(a) 中， $\triangle ABC$ 為鈍角三角形， $\angle A$ 為鈍角， A' 為鈍角對邊的中點。根據定義，延長 CA 至 E ，使 $BE \perp CE$ ，那麼 E 便是 B 的垂足。另一邊， F 是 C 的垂足。還有，三條垂線 DA 、 BE 和 CF 相交於垂心 H 。比較圖 9(a) 和圖 5，我們發現兩圖的結構是相同的，我們亦可利用相同的推理得 $\angle EA'F = \angle EDF$ ，從而得知 D 、 E 、 F 和 A' 四點共圓。

圖 9(b) 中， $\triangle ABC$ 為鈍角三角形， $\angle A$ 為鈍角， B' 為鈍角邊上的中點。同樣，我們希望證明 D 、 E 、 F 和 B' 四點共圓。留意 B' 是 AC 的中點，它亦是圓 $ADCF$ 的圓心，因此 $\angle EB'F = \angle AB'F = 2\angle ACF = 2\alpha = \angle EDF$ 。所以亦得 D 、 E 、 F 和 B' 四點共圓。亦此可知 A' 、 B' 、 C' 、 D 、 E 和 F 六點共圓了。

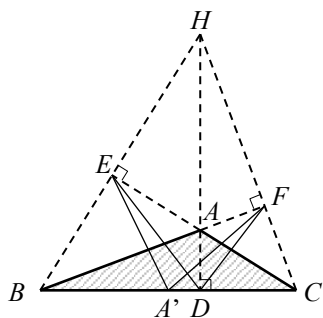


圖 9(a)

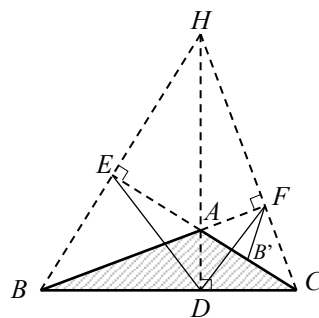


圖 9(b)

至於其餘 3 個關於鈍角三角形六點共圓的證明，就留給感興趣的讀者自行填補，不再贅述了。本文在此結束。

不過，且慢！比較圖 9(b) 與圖 2，兩圖的架構基本上是相同的，只是 A 和 H 、 E 和 F 互相交換了位置吧了。而圖 9(b) 中的 B' ，正好是圖 2 中由頂點 C 至垂心 H 的中點！原來所謂的「由頂點至垂心的中點」，其實是圖 2 中鈍角三角形 $\triangle HAB$ 、 $\triangle HAC$ 和 $\triangle HBC$ 鈍角邊上的中點，而按照鈍角三角形「六點共圓」的證明，這三個點也在圓 DEF 之上！換言之，我們在證明鈍角三角形六點共圓的同時，原來已經證明了「九點共圓」這個定理！

作者電郵：jckleung@netvigator.com