正方形的外接圓與神奇數字 1.62 歷史意義考查

楊鳳興
香港真光中學

中學數學課程中，其中一種經常出現題型是正方形的外接圓。無論是初中的畢氏定理或圓面積計算，還是高中圓的特性，總會見到正方形和圓形之間的各種關係。然而在古代中國，計算正方形外接圓的面積不只是幾何問題，更是度量衡問題。據記載，古代中國並非以重量，乃是以容積來量度米糧。東晉陶淵明的「不為五斗米折腰」中的「斗」及《莊子・外物篇》中「斗升之水」的「升」，它們既是量器名稱，亦是其中一種容積單位，容量大小由容器尺寸決定。《漢書・律歷志》稱此法為「用度數審其容」 ─ 先計算容器體積，再換算為容積單位，其目的是讓工匠能根據尺寸準確複製出符合要求的容器。這種換算方法在不同數學古籍如《九章算術》、《孫子算經》，及《數書九章》都可見。例如，《孫子算經》其中一條「囤積量容」問題：「今有圓窖周五丈四尺，深一丈八尺。問受粟幾何？答曰：『二千七百斛。』」。解法是先把圓周自乘 $54 \times 54 = 2916$ ，再把答案乘以圓柱體高度 $2916 \times 18 = 52488$ ，把數值除以 12，得出圓窖體積$= \dfrac{52488}{12} = 4374$ 立方尺。以一斛等於 1.62 立方尺，得出圓窖有 2700 斛。在這裏「斛」既是量器名稱，亦是容積單位。整個計算值得留意的地方有二。其一，因為《孫子算經》的圓周率是 3，圓周自乘再乘以高度除以 12，即 $\dfrac{(2\pi r)^2 h}{12} = \pi r^2 h$ 就是我們慣用的圓柱體公式。其二，以一斛等於 1.62 立方尺中，「1.62」從何而來？

日本史學家平勢隆郎指出「1.62」與中國王權有著極密切關係。中國自周朝起對禮法已非常重視，禮代表了規矩和典範，並天人之間與人人之間的關係。音樂作為禮的一部分自然要合乎禮法要求。春秋戰國期間，人們開始懂得利用氣流通過不同長度的銅管發出聲音，以此來定義音階。長九寸，容積為 0.81 立方寸的銅管所發出的音調定為起始音，發此音的銅管被視為律管之首，命名「黃鐘」。黃色，近似土地顏色，屬五色之首，有代表君主的含意。黃鐘律是眾音之始，代表皇室中央地位。鐘與種同音，代表萬

物以種子為端始，亦代表一個以農立國的社會對生產的重視。每當新政權建立，統治者為鞏固王權和穩定民心，均會下令重新審定黃鐘的音律，以彰顯自己乃授命於天。由於當時人對宇宙的理解認為「九」乃萬物之起源，長九寸，容積為 0.81 立方寸的黃鐘亦反映出天地間萬物之諧和，風氣正順，四季有序，萬物按規律繁衍。是對混亂狀態的社會回歸秩序系統的一種投射。公元前 350 年商鞅在秦國推行統一度量衡變法時，頒行的標準量器「商鞅方升」便是以黃鐘的 20 倍，即 16.2 立方寸為一升（方升銘文曰：「**爰積十六尊五分尊壹為升。**」)。至嬴政統一六國後，16.2 立方寸為容積基本單位一升便成為全國標準量制。

圖一　商鞅方升[1]

西漢末年，王莽篡漢，改國號「新」。王莽以復古制為命，鞏固權力為實，公元 9 年命劉歆重新製作標準量器。後世稱為「新莽嘉量」的銅斛由五個分量組成，每個代表一種容積。主體是一個圓柱桶，中間有隔層，上為「斛」、下為「斗」；兩旁有耳，亦呈圓筒狀，左耳為「升」、右耳上部為「合」，下部為「龠」。每個分量刻有銘文，記載該量器的形制、規格、容積及與其他分量的換算關係。

1　插圖取自互聯網，上海博物館 https://www.shanghaimuseum.net/mu/asset2/20180904140700387/。

圖二　新莽嘉量[2]

新莽嘉量上面刻有銘文曰：

「律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九釐五毫，冥百六十二寸，深尺，積千六百二十寸，容十斗。

律嘉量斗，方尺而圜其外，庣旁九釐五毫，冥百六十二寸，深寸，積百六十二寸，容十升。

律嘉量升，方二寸而圜其外，庣旁一釐九毫，冥六百四十八分，深二寸五，積萬六千二百分，容十合。

律嘉量合，方寸而圜其外，庣旁九毫，冥百六十二分，深寸，積千六百二十分，容二龠。

律嘉量龠，方寸而圜其外，庣旁九毫，冥百六十二分，深五分，積八百一十分，容如黃鐘。」

銘文內容中有幾個字眼可特別留意。每句開首的「律」字指的正是黃鐘律，代表新莽嘉量的製作在禮法上跟隨黃鐘律的君權神授觀念。最末一句「容如黃鐘」乃指最小分量的「龠」與黃鐘律管容積相同。二龠等於一合，十合等於一升，十升等於一斗，十斗等於一斛。顯示出每個容器分量都和黃鐘律有關。在量制上以一升為基本單位，乃承襲了秦商鞅 16.2 立方寸為一升的的概念。然而圓柱體的底面積該如何計算呢？製作方法乃來自《周禮‧考工》「栗氏量」。周禮記載：「栗氏『為量，鬴深尺，內方尺而圜其外』」。所謂「方……而圜其外」是指先繪出邊長一尺之正方形，再給出一個外接

2 插圖取自互聯網，國立故宮博物館 https://theme.npm.edu.tw/selection/Article.aspx?sNo=04001129。

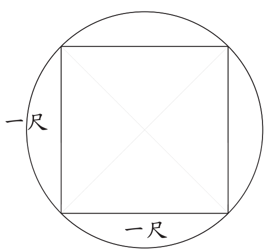
圓，正方形對邊長度便是圓的直徑，外接圓面積便是量器的底面積（如圖三）。可是，這個方法給出的圓面積遠遠少於黃鐘律的要求。故此，他在正方形對角線兩端加長，「庣」指的是正方形對角線與圓之間的距離，而「冥」便是圓面積。以漢代之前圓周率為 3 去計算及比較栗氏量與嘉量斛的底面積（見圖四）得出，

$$\text{栗氏量底圓面積} = 3\left(\frac{\sqrt{10^2+10^2}}{2}\right)^2 \text{平方寸}$$
$$= 150 \text{平方寸}$$

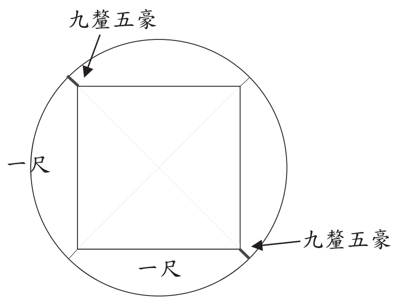
與 162 平方寸相距甚遠。

$$\text{嘉量斛的底面積} = 3\left(\frac{\sqrt{10^2+10^2}}{2}+0.095\right)^2 \text{平方寸}$$
$$\approx 154.058 \text{平方寸（準確至小數點後 3 個位）}$$

與 162 平方寸仍有一定距離。



圖三　栗氏量底正方形外接圓



圖四　新莽嘉量庣旁示意圖

倘若採用今天較準確的$\pi \approx 3.14159...$，

$$\text{嘉量斛的底面積} = \pi\left(\frac{\sqrt{10^2+10^2}}{2}+0.095\right)^2 \text{平方寸}$$
$$\approx 161.329 \text{平方寸（準確至小數點後 3 個位）}$$

才比較接近銘文記載的要求。

由於劉氏沒有釋解如何得出「庣」的數值，因此歷代的數學家均對此作出研究。其中一個說法是劉氏所採用的是一個較準確的圓周率。在九十世

紀三十年代，更有一些中算史家更以逆推方法，找出所謂劉歆圓周率。可惜，這個逆推方法，在嘉量斛及嘉量升計算雖然可以得出相同結果，但是以嘉量合計算則不太相同。

$$\text{以嘉量斛容積推算圓周率} = \frac{162}{\left(\frac{\sqrt{10^2+10^2}}{2}+0.095\right)^2} \approx 3.\ 15466456，$$

$$\text{以嘉量升容積推算圓周率} = \frac{6.48}{\left(\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}+0.019\right)^2} \approx 3.15466456，$$

$$\text{以嘉量合容積推算圓周率} = \frac{1.62}{\left(\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}+0.009\right)^2} \approx 3.15\ 9071401。$$

由此可見，劉歆是否曾採用一個較準確的圓周率仍是未解之謎。

清周壽昌《漢書注校補》記載，祖沖之亦曾試過以自己計算出來的圓周率 $\pi \approx 3.14159$ 推算，要滿足嘉量斛的體積，所需要的庣 $= \sqrt{\frac{162}{3.14159}} - \frac{\sqrt{200}}{2} \approx 0.109896$，與劉歆的結果，兩者相差 0.014896 寸。祖沖之以為這是劉歆計算不夠精密而在庣上有所偏差引致。

在此，筆者嘗試以另一角度去探究，除了圓周率，在計算庣的事情上面是否還有別的準則。由於嘉量銘文除了詳情記錄各量器規格，還有斛、斗、升、合、龠五量之間的換算關係。因此，

設 p 為圓周率，d_1 為斛庣，d_2 為升庣及 d_3 為合庣。

則 $$\text{嘉量斛體積} = p\left(\frac{\sqrt{10^2+10^2}}{2}+d_1\right)^2(10) = 10p\left(5\sqrt{2}+d_1\right)^2$$

$$\text{嘉量升體積} = p\left(\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}+d_2\right)^2(2.5) = 2.5p\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2$$

$$\text{嘉量合體積} = p\left(\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}+d_3\right)^2(1) = p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+d_3\right)^2$$

由於一斛等於一百升，即
$$
\begin{aligned}
10p\left(5\sqrt{2}+d_1\right)^2 &= 100\times 2.5p\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2 \\
10p\left(5\sqrt{2}+d_1\right)^2 &= 250p\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2 \\
\left(5\sqrt{2}+d_1\right)^2 &= 25\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2 \\
5\sqrt{2}+d_1 &= 5\left(\sqrt{2}+d_2\right) \\
d_1 : d_2 &= 5:1
\end{aligned}
$$

如此類推，一升相等於十合，即
$$
\begin{aligned}
2.5p\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2 &= 10\times p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+d_3\right)^2 \\
\left(\sqrt{2}+d_2\right)^2 &= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+d_3\right)^2 \\
\sqrt{2}+d_2 &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+d_3\right) \\
d_2 : d_3 &= 2:1 \\
d_1 : d_2 : d_3 &= 10:2:1
\end{aligned}
$$

倘若設 $d_1 = 10k$ ，$d_2 = 2k$ 及 $d_3 = k$（k 為一非零常數），則
$p\left(\frac{\sqrt{200}}{2}+10k\right)^2 = 162$，$p\left(\sqrt{2}+2k\right)^2 = 6.48$ 及 $p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+k\right)^2 = 1.62$ 可化簡為相同的二元一次方程式 $50p\left(\sqrt{2}k+1\right)^2 = 162$ 。
由此可見，新莽嘉量的規格只須滿足方程式 $50p\left(\sqrt{2}k+1\right)^2 = 162$ 便可。

事實上，嘉量斛圓面積：嘉量升圓面積：嘉量合圓面積 $= 162:6.48:1.62$
$= 100:4:1$
由於相似圖形面積比是邊長比的平方，故
嘉量斛圓直徑：嘉量升圓直徑：嘉量合圓直徑 $= \sqrt{100}:\sqrt{4}:\sqrt{1}$
$= 10:2:1$
考慮未加上庣數前的正方形外接圓，發現
嘉量斛外接圓直徑：嘉量升外接圓直徑：嘉量合外接圓直徑
$= \sqrt{200}:\sqrt{8}:\sqrt{2}$
$= 10:2:1$

由此可見，劉歆所採用之斛庣：升庣：合庣 $= 0.095 : 0.019 : 0.009$

$$= 10 : 2 : 0.947$$

$$\approx 10 : 2 : 1$$

劉歆的計算實在是相當精密了。

這躺歷史考證之旅，不單讓我們了解到 1.62 背後的歷史意義，及它與數學關係，更重要是當我們以為古代中國因為圓周率之不精密而影響了很多度量衡的計算時，以上的考查卻告訴我們，古人的大智慧。雖然整篇文章沒有論及「1 個單位」這個概念，但是「1」卻在古代中國佔有很重要數學歷史地位。或許正如老子在《道德經》所言：「道始於一」，憑藉「1」這個概念便可形成三千萬千世界。

參考文獻

平勢隆郎（2018）。李彥樺譯。《從城市國家到中華：殷商與春秋戰國時代》。台灣：商務出版社。

丘光明（2011）。《中國古代度量衡》。北京：中國國際廣播出版社。

吳承洛（2014）。《中國度量衡史》。上海：上海三聯書店。

錢寶琮主編（1964）。《中國數學史》。北京：科學出版社。

戴念祖、王洪見（2013）。論樂律與曆法、度量衡相和合的古代觀念。《自然科學史研究》32 卷 2 期，192-202。

Loewe, M. (2016). *Problems of Han administration: ancestral rites, weights and measures and the means of protest*. Boston: Brill.

作者電郵：fhyeung@gmail.com