循環論證對談錄

蕭文強
香港大學數學系

幾天前嚴老師出了一道幾何課的測驗題：ABC 是等腰三角形，$AB = AC$，M 是 BC 的中點，證明 ΔABM 與 ΔACM 全等。今天派卷了，下課後學生畢伙棄到教員室找嚴老師，向他執卷問難。以下是師生的對話，「師」代表嚴老師，「生」代表畢伙棄。（這道題目基本上是 2017 年 HKDSE 普通數學卷一第 10 題（a）部。）

師：小畢，有事找我嗎？

生：老師，我解答了測驗題，卻得到零分，你畫了一個紅交叉，何解呢？

師：你看，你是這樣寫：ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，故 角 $ABM =$ 角 ACM；由於 M 是 BC 的中點，$BM = CM$，故 ΔABM 與 ΔACM 滿足 SAS（兩邊一夾角），故全等。但是，我們要利用 SAS 去證明等腰三角形的底角相等，你先用了這回事，後來又回到 SAS，便犯了循環論證的謬誤，所以沒有分數。

生：我並沒有利用等腰三角形的底角相等去證明 SAS，怎麼會是循環論證呢？頂多你說我用了兩次 SAS 吧，第一次是利用它得到等腰三角形的底角相等這回事，只不過時間不足夠，我沒有把它當作一條引理先證明吧。但是我們在課上已經學了這回事，為何不能運用呢？

師：其實你可以完全避開 SAS，只要注意到 $AB = AC$，$BM = CM$，AM 是公共邊，便知道 ΔABM 與 ΔACM 滿足 SSS（三邊），故全等。豈不是直接了當，快捷簡單得多嗎？這樣做，你便拿滿分了。

生：老師，在課上你教我們 SSS 的時候，不是也要運用 SAS 嗎？我們要不要把 SSS 當作一條引理先證明呢？

師：那倒不必，因為你們在課上已經學了 *SSS* 這回事。

生：那麼，在課上我們也學了等腰三角形的底角相等這回事呀！

師：唔…，讓我再想一想吧。你留下測驗卷好了。

嚴老師當晚立刻拜訪已退休多年的老老師，向他請教循環論證這個問題。嚴老師剛出任數學教師的時候，老老師已教學多年，將年屆退休。他一向用心教學，也十分關心同事的教學情況，很喜歡跟他們討論數學問題和教學問題，常常說「教學相長也」。首先，嚴老師向老老師敘述了他與學生畢伏棄之間的爭辯，以下是嚴老師和老老師的一段對話，「師」仍代表嚴老師，「老」則代表老老師。

老：嚴 Sir，伏棄說的有他的道理，他並沒有犯了循環論證的謬誤，你只可以說他沒有全部解釋清楚，沒有把全部論證寫出來吧。但是，你運用 *SSS*，難道你又已經把全部解釋交代清楚嗎？要證明 *SSS*，你需要用到 *SAS* 這回事。

師：我們怎麼可以什麼都重頭開始解釋呢？究竟何謂循環論證呢？

老：以我所知，循環論證是用了一個假設 A 去證明某個結果 B，但要證明 A，卻又需要用到 B。讓我舉一個例子：證明三角形的內角和是兩個直角。有人說，在三角形的邊上各取一點，組成另一個三角形，於是原來的三角形分成四個三角形。設每個三角形的內角和是 s，則合起來是 4 s。但所有這些內角加起來，其實是原來三角形的內角和 s 和及三對平角，即是 s 加六個直角。於是 $4s$ 等於 s 加六個直角，即是 $3s$ 等於六個直角，或 s 等於兩個直角，證畢。這個證明犯了循環論證的謬誤，因為仍未證明三角形的內角和是兩個直角，你怎麼能假設每個三角形的內角和都是某個常數 s 呢？關鍵在於我們知道每個三角形的內角和是個常數（而且是兩個直角），那是根據平行公設（邏輯等價於 Euclid 的《原本》的「第五公設」）而得，至於企圖證明「第五公設」的嘗試，在數學史上不勝枚舉，很多著名數學家為此努力，然而屢戰屢敗，屢敗屢戰，寫就了數學史上革命性的一頁，經歷

了二千多年，導致非歐幾何學的誕生，也改變了人們對數學這門學科的本質的認識。

師：那麼，我們是否要把 Euclid 的《原本》列作必讀書本呢？

老：Euclid 的《原本》不易讀，但作為數學教師，嘗試讀一讀開首的幾卷是十分有益的，即使只是有個梗概認識也有幫助。但不必把《原本》的內容照本宣科地加入中學課程，那是不適宜的。更加不應該把它視為幾何教學的「法典」，什麼都以 Euclid 的《原本》所說為準！

師：聽說前輩在中學讀的幾何，是根據 Euclid 的《原本》，是不是呢？

老：噢，六十多年前的往事矣！那時我們在中二採用的課本是 C. V. Durrell 的 *A New Geometry for Schools* 的 Stage A (1939)，內容側重於計算各種平面幾何形狀的內角、邊長、面積，由此學習了一些幾何形狀的性質和結果。內容也涉及對實物的認識，可以說是某種「實驗幾何」。印象尤其深刻的，是課本結尾一節教導如何構作那五個正多面體，我動手畫動手做，趣味盎然，亦從中熟習了基本的幾何直尺圓規作圖方法。最後，見到親手做出來的五個正多面體，那份內心喜悅及滿足感，至今仍縈繞腦際！到了中三，我們沒有繼續採用 Durrell 的 Stage B，轉用了 A. B. Mayne 的 *The Essentials of School Geometry* (1933)，開首便是 Euclid 的《原本》的定義、公理、公設，然後導出一連串的定理。當時，其實不知道什麼 Euclid 的，因為老師很快把這部份略過，三扒兩撥，便開始證明定理。雖則如此，隱約間我們還是初步認識到從基本假設推導一些並不明顯的結果的過程。真正認識數學的公理化處理方式，要再過五、六年後進入大學才碰到。

師：當時的英國課本，都是採用 Euclid 的《原本》的敘述嗎？

老：其實，在十九世紀後期，英國已經進行修改沿用 Euclid 的《原本》的古典幾何教學模式，並且於 1871 年成立了一個叫做 Association for the Improvement of Geometrical Teaching 的組織，就是今天英國全國數學教師的主要組織 Mathematical Association 的前身。Durrell 和 Mayne 的幾何課本，都是二十世紀三十年代的產物。我還記得，Mayne 證明等腰三角形的底角相等，是定理十一（不是如 Euclid 在《原本》放在那麼早，叫做定理

五），證明的手法是構作頂角的角平分線，把三角形分成兩份，利用 *SAS* 證明該兩個三角形全等，故底角相等。

師：咦！那豈不是循環論證嗎？證明存在角平分線，要利用等腰三角形的底角相等這回事呀！

老：Mayne 倒很小心，證明定理十一之前，他已經寫下了兩個公設，一是任何直線段必有中點，一是任何角必可平分。

師：嘩！每次要用到什麼便多加一條公設，豈不是十分累贅嗎？

老：你有這種不滿情緒，自然不過。當年修訂改良幾何教學，不再沿用 Euclid 的《原本》的古典教學模式，是碰到這種問題的，持續了很多年。到了二十世紀五十年代後期至六十年代初的「新數運動」中又再出現一番熱烈爭辯，當時更有人喊出「打倒歐家店（Down with Euclid）」的口號呢！有機會我們再詳細談談這段故事吧。

師：讓我回到等腰三角形的底角相等這條定理，我曾經在一本課本讀到 Euclid 的證明，構作了不少補助線，十分紆迴 ；後來我又在另一本課本讀到一個不用構作任何補助線的證明，短小精悍，令人拍案叫絕。證明是把 ΔABC 看作為兩個等腰三角形，即是 ΔABC 和 ΔACB。由於 $AB = AC$ 和 $AC = AB$，而且角 $BAC =$ 角 CAB，利用 *SAS* 知道那兩個三角形全等，故角 $ABC =$ 角 ACB，證畢！

老：這個巧妙的證明，據云是西元四世紀初希臘數學家 Pappus 的證明，過了一百多年後，經由另一位希臘數學家 Proclus 在他的著述介紹而廣為人知。聽說在上世紀六十年代剛開始研發電腦證明的時候，有人把等腰三角形的底角相等這條定理交給電腦做，馬上得到這個證明！

師：不少學生卻不太欣賞這個巧妙的證明，還有好些學生弄不明白這個證明。

老：那大抵是心理因素作祟，明明只有一個三角形，怎麼把它翻轉了便當作是兩個不同的三角形呢？（但結果它們又相同！）究竟做了些什麼？但

更有趣的問題是：Euclid 怎麼想不到這個巧妙的證明呢？他把 *SAS* 鋪排在前，理應也有這種運用對稱的意圖吧？

師：對了，為何 Euclid 棋差一著呢？

老：其實 Euclid 想得更深入，我們不得不佩服他的縝密思考。Euclid 的《原本》卷一的定理五，是有兩部份的，其一是內底角相等，其二是外底角也相等。Pappus 的巧妙證明解釋了前一部份，對後一部份卻無所施其技！但沒有第二部份，以後有不少定理便證不了。

師：內底角和外底角不是互補嗎？證明瞭內底角相等不是也證明了外底角相等嗎？

老：噢噢…，小心想一想，這樣有沒有犯了循環論證的謬誤呢？要注意，互補角是 Euclid 的《原本》卷一的定理十三。

師：明白了！但我仍然感到困惑，如何避免循環論證呢？

老：也許我們必須分開兩方面來談，其一是教授幾何的內容，其二是考核幾何的知識。你的困惑主要源於後者，因為在考試中，教師很擔心學生會因為犯了循環論證的謬誤而失掉分數；怎樣作答，才肯定可以獲得分數呢？

師：對了，我相信我是擔心後者。

老：依我看，學生在考試中答題，應該容許他們運用任何已經學了的知識，因為你要考核的是學生能否運用這些知識去解決問題。你總不能要求他們每一題都只能從某幾條基本公設作為起點吧？況且，在教學時，你也許從來沒有強調內容的邏輯次序鋪排，又怎能要求學生自動瞭解這一點呢？即使你已經強調內容的邏輯次序鋪排，但不同的課本的鋪排，可能不盡相同，怎能保證每個參加公開考試的學生都是學了同樣的邏輯次序鋪排呢？不過，教師也應在適當場合提點學生不要犯了循環論證的謬誤。至於教學內容的邏輯次序鋪排，那是另一個教學上要面對的問題。尤其是中學幾何的課程，你已經看到，自十九世紀後期迄今，還是一個不易解決的問題，有機會我們再詳談吧。

師：謝謝前輩指點，Euclid 的《原本》真的大有學問！

老：除了 Euclid 的《原本》，教師也可以嘗試讀一讀中國古代數學經典名著《九章算術》加上劉徽的注疏。這兩本中西數學經典名著風格迥異，各有千秋，互相參照，雙劍合璧，有打油詩為證：「言必《原本》非崇洋，心懷《九章》亦平常，中西卷帙相輝映，異曲同工意深長。」

作者電郵：mathsiu@hku.hk