

蘭利的偶然角難題（上集）

龍德義
退休校長

純幾何難題

蘭利，是何許人也？

偶然角？相信讀者更從未曾聽聞過呢！

然而，以下的一道數學題或許讀者偶爾會在臉書、手機社交討論群組中碰巧遇上：

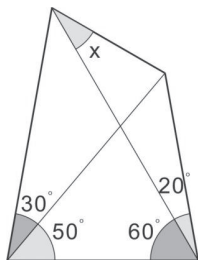


圖 1：Langley's Adventitious Angles (1922)

圖 1 中的四個角已知，分別為 30 度、50 度、60 度、20 度，求未知角 x 。這正是蘭利的偶然角難題（Langley's Adventitious Angles）。讀者不妨試試計算圖中的角度，不難發現，除了兩個角（其中一個是未知角 x ）外，其餘角度的大小是很容易計算得到的，只需利用三角形內角和為 180 度就可以。可是，若果要求只運用純粹幾何的方法去找未知角 x ，確實有點難度。筆者猶記得，三十多年前首次遇上這道題目，「違規地」運用三角學的正弦定理嘗試找出未知角度，發現 x 竟然等於 30 度，一個工整的數值。

可惜的是，經過多年也未有找到純幾何的解題方法，現在回想起來，還記得當時共事的前輩黃家鳴，認真地用記事卡繪畫這道題目送給筆者留念，也提醒筆者有空時想辦法破解它。又記得一次中大數學系師生晚宴時，與筆者的論文導師陸慶燊博士鄰座，有機會談起這道問題，他表示一時之

間也沒有頭緒，同怡的師兄弟加入討論，指出題目中的四邊形可以視為一個（80 度-80 度-20 度）等腰三角形的一部分，而 18 個這樣的等腰三角形可併合成一個正十八邊形。故此，他們建議筆者可以嘗試從正十八邊形以及它的對角線着手研究。當年筆者面對十八邊形內那麼多的對角線，有點束手無策，也惟有無功而還。

這道問題就這樣擱置在筆者的記憶 30 多年了，今年新冠狀病毒疫情全球爆發，大家留在家中的時間增加了許多，手機社交討論群組內同樣也增加了「挑戰題」傳送的質和量。月前，一位舊生傳送了一道同樣只可運用初等幾何方法解題的「挑戰題」，同樣也涉及（80 度-80 度-20 度）等腰三角形，不過，它較蘭利的偶然角難題簡單點，筆者竟然能夠利用正十八邊形的對稱性，以及等腰三角形對稱性質，自行給出純幾何的解法，破解了「挑戰題」。

成功的解題經驗鼓勵筆者嘗試解決蘭利的偶然角難題。經過兩、三天翻來覆去琢磨當中的幾何論證，終於清楚理解以下三者彼此之間的關係：（80 度-80 度-20 度）等腰三角形、正十八邊形、蘭利的偶然角難題。其實，筆者根本不打算書寫這篇文章，因為上述的種種都是筆者個人的成長經歷，其他人不會有多大興趣，至於破解難題，純粹是自娛，當中並沒有什麼重要的數學發現，況且互聯網絡上清楚指出蘭利的偶然角難題，早已被破解，似乎無需筆者再「說三道四」！

為數學教育盡點力

那麼，筆者寫這篇文章的背後動力何在？其一是紀錄 2020 年初，全球大眾都被勸諭逗留在家，各人的私人時間增加不少，無需急促完成工作，可以好好整理自己的想法。其二是現時透過互聯網絡學習，相比筆者求學時期的學習環境，網上學習交流變得較為便捷、回饋的人可以來至世界各地、回饋的時間雖未必是即時的，但也已無需要等上一兩個星期呢！正因為資訊的傳送渠道便捷，邏輯思維的訓練更顯重要，而幾何論證練習被公認為是培養邏輯思維的良方。其三是筆者嘗試提供一系列相關連的幾何論證練習，讓學生探究（84 度-84 度-12 度）等腰三角形的特性，作為蘭利的偶然角難題的延伸探究活動。簡言之，願為數學教育略盡綿力。

偶然角

言歸正傳，先說說「蘭利的偶然角」，它是筆者個人選擇的中譯名字，皆因互聯網絡上搜尋 Langley's Adventitious Angles，維基百科網頁只有 Langley's Adventitious Angles 的英語和日語的解說版本。至於難題的原作者 Edward·Mann·Langley，維基百科網頁亦只有英文版和南阿塞拜疆文的介紹，筆者幸運地在某個網頁才算是找到唯一的一個中譯名字：艾華·曼恩·蘭利（1851-1933），那網頁的資訊除了指出他是位英國數學家外，中譯的介紹再沒有其他片言隻語了，以致，筆者在互聯網絡上根本找不到 Langley's Adventitious Angles 任何一個中譯文本，因此，筆者大胆地採用了 Adventitious 的中文意譯「偶然」，希望盡量保留原作者取名的精髓：「四個角度在偶然的安排下，令到未知角竟然可以是意想不到地工整，相信幾個角背後的關係還可以單憑純幾何推導出來；另外，假如希望再要找出另外四個角度，同樣令到未知角也要工工整整的話，相信要碰上好好的運氣呢！」

值得一提的是，蘭利是於 1922 年在著名數學教育學術期刊 The Mathematical Gazette 刊出他的偶然角難題，題目 644 號。而蘭利對數學的貢獻莫過於他 1894 年創辦了 The Mathematical Gazette 這本數學教育學術期刊，每年發行三期，至今仍推動著世界各地數學教與學的交流。

另一方面，在互聯網絡上未能找到中譯名字，反映出中國內地、台灣，以及港澳地區的數學家和數學教育工作者對蘭利的偶然角難題未有產生探究的興趣。筆者碰巧遇上這方面的佐證，台灣數學教育工作者艾利歐在他網頁上的書評寫道：「黃家禮編著的《幾何明珠》第 27 章『一個古老的幾何難題』(Langley's Adventitious Angles)是一個曾經以『難』而出名的題目，事實上這至今仍舊很難。你可能時不時在臉書上偶然就會發現有人又開始在討論這道題目而陷入困境中。不使用解析或三角函數的方法其實相當難想到，大家可以不妨試試看自己能獨立想到幾個方法呢？」

幾何中的一顆寶石

筆者特意找來《幾何明珠》2001 年九章出版社印刷的繁體中文版，看看作者黃家禮對問題如何描述：「問題的起源，現在尚沒有查清。但關於它的解，有一個事實是比較明確的：到廿世紀 20 年代，這個題目的大多數解法都不是純幾何的，即使是利用三角解法也不是很容易的。1951 年，華盛

頓大學的湯普森（Thompson）給出了一個幾何味道很濃的解法，其巧妙構思頗受人稱道。滑鐵盧大學的羅斯·杭斯伯格（Ross Honsberger）把這道題目及其解法譽為幾何中的一顆寶石，可見數學家對它的厚愛。」

史上最難的初等幾何問題

在互聯網上，蘭利的偶然角難題還有另一個中文名稱。筆者在國內的一個繁體中文網頁稱它為「史上最難的初等幾何問題？」細看網頁的文字描述，相信網頁撰文者是參考 Keith Enevoldsen's Think Zone 網頁內的一道謎題「World's hardest easy geometry problem」，網址為 <https://thinkzone.wlonk.com/MathFun/Triangle.htm>。

無巧不成話，筆者搜尋資料過程中發現香港的數學教育工作者也曾探究蘭利的偶然角難題，同樣也使用了「World's hardest easy geometry problem」的名稱，而且是十分近期的。蔡偉峰老師（CHOI Wai Fung, Brian）在香港數學教育會議 2017 的分組論文宣讀/工作坊活動中《World's hardest easy geometry problem》，是首次在本港公開地與數學教育工作者探索、討論這道「難題」。

相信蔡老師也曾參考上述 Keith Enevoldsen's Think Zone 網頁。網頁中講述了蘭利的偶然角難題的起源，以及新近的發展，然而，網頁中首先介紹的題目 1，並非筆者在本文首介紹的那道題目，題目 1 的幾何圖形跟原題目的極為相似，只不過更動了當中的兩個角度，並且擴展至整個等腰三角形，如圖 2。

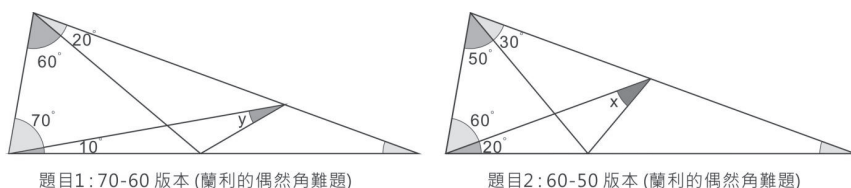


圖 2：不同版本的兩個題目

題目 1 中的四個已知角，分別為 10 度、70 度、60 度、20 度，求未知角 y 。網頁同樣也介紹蘭利的偶然角難題的原題目，網頁作者記作題目 2「World's second-hardest easy geometry problem」。網頁作者指出題目 2 由蘭

利於 1922 年發表，在 The Mathematical Gazette 刊登。而題目 1 最早的印刷文本是由 Harry Schor 於 1974 年發表，在 The New York State Mathematics Teachers' Journal 刊登，稍後再由 Gary Gruber 於廿世紀 90 年代在多個渠道，包括報章和「The Genius Test」等，推廣普及，才引起較多人產生解答題目 1 的興趣，人們廣泛的轉載。網頁作者還刻意強調：「每位認識初級幾何的中一二學生都可以讀懂解題的幾何論證，然而只有極少數的人可以自行想出正確的幾何論證。本人這段期間收到過千封電郵，當中只有少於 5% 的電郵提出正確的幾何論證，他們大多數是數學專業人士或者是大學生。根據本人接收的電郵，大多數的幾何論證是不正確的，有些則漏寫了某幾個重要步驟，假如發電郵人士聲稱『他解題只花上數分鐘』的話，他的幾何論證大多數都只會是錯或漏呢！」

或許，讀者閱讀至此，也有躍躍欲試的衝動，筆者當然十分鼓勵讀者自行找出幾何論證。

解題提示

最好也是不急於要求提示，獨自完成；假如苦思一段長時間還未有頭緒，筆者也建議可以找點提示也不壞，始終不是直接找答案，解題的滿足感也會有的。

提示 1、題目 2 比題目 1 淺易，先嘗試解決題目 2。

提示 2、大家都集中在角度的大小上，其實題目圖形中的線段長度也是舉足輕重呢！

提示 3、嘗試在題目 2 圖形中添加作圖線，從而構作出一些等腰三角形。

提示 4、在題目 2 中，適當地添加作圖線，可以構作出五條等長的線段，找到四個互不相似的等腰三角形。假如你找到它們的話，答案也會近在咫尺，或許換個角度觀看圖形，答案或會呈現眼前。

提示 5、題目 1 涉及的線段不止一條，需要顧及兩條或以上的線段的長度。

提示 6、嘗試利用題目 2 的結果。

提示 7、不要輕言放棄，筆者就嘗試了各式各樣的幾何操作：旋轉、反射、併合、重疊，看看有否有趣的發現。

假如，在同一篇文章中給出答案的話，讀者較易會按捺不住，在完全未作嘗試解題，就心急地閱讀答案，剝奪了這些讀者體驗解題的時機，加上《數學教育》的稿件有字數的限制。為此，筆者決定將文章分成上、下兩集，順理成章地，將答案安排在下集揭盅。

搜尋偶然角

趁着還有些書寫空間，再談論蘭利取名「偶然角」(Adventitious Angles)這事宜。自蘭利於 1922 年刊出 60-50 的版本，相隔了 52 年，於 1974 年才再刊出 70-60 的版本，雖然有傳言：「70-60 的版本早於 50 年代已被發現，只是未有正式發表而已」，但時隔至少幾十年，足以印證「偶然」這個不確定性的形容用詞名符其實。

不過，隨著資訊科技的發展，或許要找到令人「意想不到」的同類型的幾何難題，相信不會再要等上那麼多年吧。筆者抱著這個信念，利用電腦上的「試算表」和「繪圖軟件」，嘗試搜尋與蘭利同類型的幾何「謎題」。筆者個人的喜好是貼近遊戲的「謎題」，無需要是「難題」，筆者能力有限，獨個兒應付不來。

筆者先跟大家分享搜尋、探索的成果，下集再詳談當中的數學細節。筆者集中搜尋滿足圖 3 中的整數角，還加上一個額外條件，就是「等腰三角形」，即要求 $a + b = c + d$ 。另外，為方便辨清可經旋轉、反射的重複題目（並刪除了較淺易的、上下對稱的，即 $b = c$ 的題目），再要求 $b > c$ 。

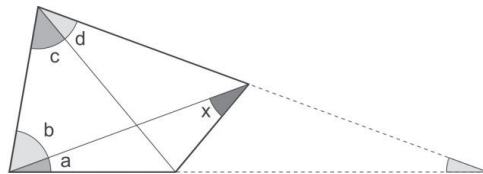


圖 3：搜尋偶然角

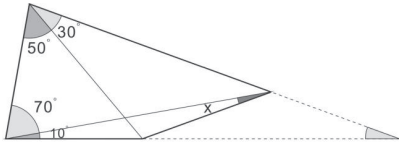
a (單位：度)	b (單位：度)	c (單位：度)	d (單位：度)	x (單位：度)		純幾何解題 困難度 的我見
(80-80-20 度等腰三角形)						
10	70	60	20	20	題目 1	中等難度
20	60	50	30	30	題目 2	初等難度
10	70	50	30	10	題目 3	中等難度
30	50	40	40	30	題目 4	淺易程度
15	65	25	55	5	題目 5	極之困難
15	65	60	20	40	題目 6	極之困難
(70-70-40 度等腰三角形)						
15	55	35	35	15	題目 7	淺易程度
15	55	40	30	20	題目 8	淺易程度
(72-72-36 度等腰三角形)						
18	54	36	36	18	題目 9	淺易程度
(84-84-12 度等腰三角形)						
36	48	42	42	36	題目 10	淺易程度
36	48	12	72	6	題目 11	淺易程度
42	42	30	54	24	題目 12	中等難度
42	42	18	66	12	題目 13	中等難度
18	66	42	42	12	題目 14	中等難度
18	66	54	30	24	題目 15	高等難度
12	72	42	42	6	題目 16	極之困難
12	72	66	18	30	題目 17	極之困難

讀者閱讀上表後，就可以得出：「『偶然角』至今已經並不像一百年前般那麼偶然」的結論。單是在蘭利原作的（80 度-80 度-20 度）等腰三角形當中，筆者多找出四個版本即題目 3 至題目 6。正如本文初提及蘭利的原作與正十八邊形有關連，而題目 7、8 的（70 度-70 度-40 度）等腰三角形與正九邊形相關，題目 9 的（72 度-72 度-36 度）等腰三角形與正十邊形相關。同樣道理，題目 10 至 17 的（84 度-84 度-12 度）等腰三角形與正三十邊形相關。

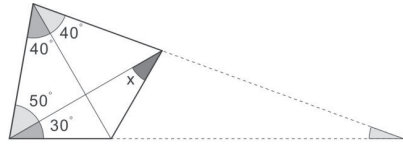
筆者在此，特意繪畫題目 3 至題目 17 的合符比例的圖象，方便讀者嘗試純幾何解題。上表亦提供了筆者在這方面嘗試的個人體驗，列為：「純幾何解題困難度的我見」，按照困難度由淺至難順序排列為：淺易程度、初等難度、中等難度、高等難度、**極之困難**。筆者盡量以客觀的角度評估每道

題目的困難度，不過，受筆者的能力和探究時間短暫的限制，難免存有主觀的成份，希望還能提供某程度的參考價值。

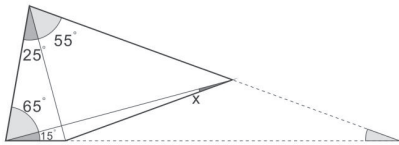
最後值得一提的是，上表的搜尋結果純粹是按筆者想當然的方向探究的，並非作出完整的、系統性的搜尋，或許仍會有所遺留（甚至會有更多呢）。心水清的讀者可能已發覺 $a + b$ 不等於 $c + d$ 的情況更為廣闊，另外，是否問題 3 至問題 17 均能只靠純幾何論證就可解題？筆者在寫稿時已經確定題目 3 至 4，以及題目 7 至 17，可循純幾何解題。換言之，筆者尚未找出題目 5 和 6 的純幾何論證解法，筆者會努力嘗試，當然也歡迎已成功破解它們的讀者指點迷津。下集續談探究歷程，並將揭盅筆者的幾何論證。



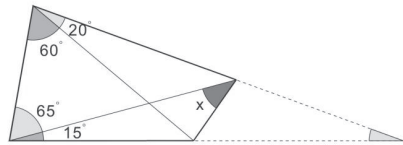
題目3: 70-50 版本 (80-80-20度等腰三角形)



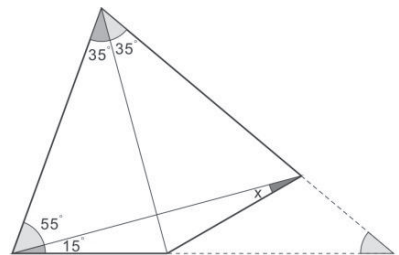
題目4: 50-40 版本 (80-80-20度等腰三角形)



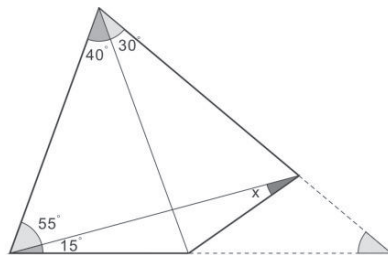
題目5: 65-25 版本 (80-80-20度等腰三角形)



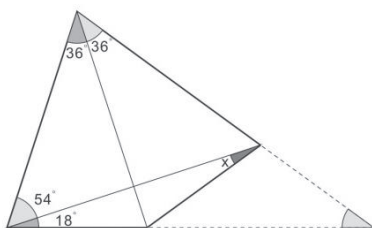
題目6: 65-60 版本 (80-80-20度等腰三角形)



題目7: 55-35 版本 (70-70-40度等腰三角形)



題目8: 55-40 版本 (70-70-40度等腰三角形)



題目9: 54-36 版本 (72-72-36度等腰三角形)



題目10: 48-42 版本 (84-84-12度等腰三角形)



題目11: 48-12 版本 (84-84-12度等腰三角形)



題目12: 42-30 版本 (84-84-12度等腰三角形)



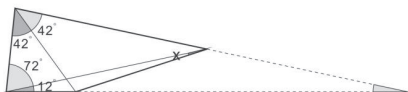
題目13: 42-18 版本 (84-84-12度等腰三角形)



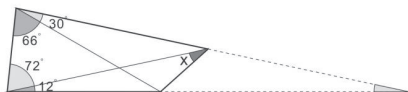
題目14: 66-42 版本 (84-84-12度等腰三角形)



題目15: 66-54 版本 (84-84-12度等腰三角形)



題目16: 72-42 版本 (84-84-12度等腰三角形)



題目17: 72-66 版本 (84-84-12度等腰三角形)

後記

在此要多謝三位現職數學老師，蔡偉峰、麥建偉和梁子傑，仗義幫忙審閱本文初稿，修正別字和錯處。在截稿前的等候期間，靈感突然間腦海中掠過，筆者趕緊抓住上述題目 5 和 6 的純幾何論證解法。其解法可以在下集文稿內一併討論了。

參考文獻

黃家禮（2001）。黃家禮編著《幾何明珠》。台北：九章出版社。

World's hardest easy geometry problem: <https://thinkzone.wlonk.com/MathFun/Triangle.htm>

史上最難的初等幾何問題：<http://www.matrix67.com/blog/archives/374>

蔡偉峰（2017）。香港數學教育會議 2017 分組論文宣讀/工作坊活動文稿：

[http://www.hkame.org.hk/hkmec2017/PPT/1.%20Choi%20Wai%20Fung%20\(Website\).pdf](http://www.hkame.org.hk/hkmec2017/PPT/1.%20Choi%20Wai%20Fung%20(Website).pdf)

作者電郵：takyeelung@yahoo.com.hk