

各三角比的由來

郭思齊

香港大學專業進修學院

字源

trigonometry 一字，源自希臘字根 tri（三）、gonon（角）和 metron（量度），即研究三角形度量（即邊角）的關係，由德國三角學家皮蒂斯楚斯（Bartholomäus Pitiscus，1561 – 1613）在 1595 年出版的《三角學：解三角形的簡明處理》（Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus）創造。

背景

三角學的本質是天地間的測量。公元前二千多年，埃及人會應用三角學的先備知識來建造金字塔，可見於萊因德紙草書（Rhind papyrus）。巴比倫人則應用到天體測量，更可能已有 $\frac{1}{\sin \theta}$ 的表（後世稱為普林頓 322 的泥板），其中 $45^\circ \leq \theta \leq 58^\circ$ 。他們也懂得運用立竿見影的原理來日圭計時，做法傳到希臘人，並演變成投影計算。

到古希臘，天文學家希柏卡斯（Hipparchus of Nicaea，190 – 120 BC）把圓內接的球體三角形和平面三角形的各邊，視為圓的弦，然後把圓心角和弦長聯繫，編制三角比率表，唯皆失傳。

後來，托勒密（Claudius Ptolemaeus，100 – 170）的著作《大成》（Almagest），運用希柏卡斯發現的三角公式，探討過弦長 d 與對應圓心角的關係，如下圖：

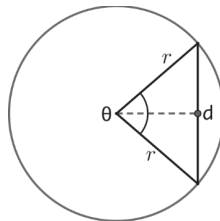


圖 1

約公元四百年，印度天文書籍《蘇利耶曆數全書》（又稱「太陽系」，Surya Siddhanta：Surya 是印度教的太陽神；Siddhanta 的漢音梵意譯為「悉檀」，解作普施眾生的系統闡述），出現了托勒密的表。

正弦

約公元 510 年，正弦正式出現。印度數學家阿利耶波多（Aryabhata，476 – 550）著《阿利耶波多》（Aryabhatiya），以梵文 *ardha-jya* 代表半弦，或 *jya-ardha* 表示弦一半，有時簡寫為 *jya* 或 *jiva*（即獵人弓弦）。

jiva 可讀成 *jiba*、*jaib* 或 *jayb*。當阿拉伯人翻譯時，由於當時的字大部份只有子音，且譯音不譯意，而 *jaib* 在阿拉伯文可解作胸部、山谷或海灣，於是就意譯成拉丁文 *sinus*，即英文的 *sine*。

簡寫成「sin」的符號，由英國天文學家岡特（Edward Gunter，1581 – 1626）開始採用，並與「tan」同時在 1624 年出現於其發明的「岡特尺」圖示說明。幾年後，英國數學家奧特雷德（William Oughtred，1574 – 1660）在 1632 年出版的《比例圓與水平儀器》（The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument）使用 sin 這縮寫，同時又簡寫成 S。1634 年，法國數學家埃里岡（Pierre Hérigone，1580 – 1643）出版《新簡明方法數學教程》（Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara method demonstratus）引入大量數學符號，包括 sin。十八世紀中葉之後，漸漸趨於統一用 sin。

餘弦

餘弦，解作餘角的正弦，故阿利耶波多稱之為 *koti-jya*，或簡寫為 *kojya*。歐洲中世紀末，文藝復興初，德國數學家繆勒（Johannes Müller，1436 – 1476，以 Regiomontanus 拉丁名聞名於世）在 1646 年出版的《論各種三角形》（De triangulis omnimodis）稱之為「sinus complementi」（餘角的正弦）。岡特最初寫作 *co.sinus*，後來英國數學教師約翰牛頓（John Newton，1622 – 1678，與 Isaac Newton 無血緣關係）改為 *cosinus*，而英國數學家莫爾爵士率先使用縮寫 *cos*。

正切和餘切

日圭和投影，產生日影測量。中國有周公測景，古希臘有泰勒斯（Thales of Miletus，640 – 546 BC）以日影求金字塔高。阿拉伯人則把竿影比跟太陽投射到地面的角聯繫。

公元 860 年左右，阿拉伯數學家梅法茲（Habash al-Hasib al-Marwazi，766 – 869）製作了首個表，列出正切和餘切（餘角的正切，即 $\tan(90^\circ - \theta)$ 或 $\frac{1}{\tan \theta}$ ）。約公元 920 年，天文學家巴坦尼（al-Battani，858 – 929）為了研究日晷，製作了 1° 到 90° 角的「投影表」，即餘切表。1583 年，丹麥數學家芬因克（Thomas Fincke，1561 – 1646）在《圓的幾何》（Geometria rotundi）首次出現 tangent 一字，來自拉丁文 tangere，意思是碰觸，或源自以下觀察：

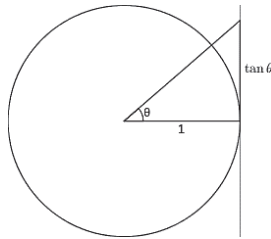


圖 2

而 cotangent 一字，在 1620 年由岡特開始使用。至於縮寫，奧特雷德在 1657 年用 t 及 $t\ co$ ，英國數學家華理斯（John Wallis，1616 – 1703）在 1693 年用 T 及 t 。保持一致縮寫的，則是英國數學家諾伍德（Richard Norwood，1590 – 1665）在 1631 年出版的《三角學》（Trigonometrie, or the Doctrine of Triangles），用 s 代表正弦， t 代表正切， sc 代表正弦的相餘， tc 代表正切的相餘， sec 代表正割。不過，即使到了今天，仍未有一致公認的符號，有些歐洲書常用 tg 及 ctg 表示正切及餘切。

正割和餘割

如正切 $\tan \theta$ 與餘切 $\frac{1}{\tan \theta}$ 互為倒數，正弦 $\sin \theta$ 有倒數 $\frac{1}{\sin \theta}$ ，稱為餘割（cosecant），餘弦 $\cos \theta$ 有倒數 $\frac{1}{\cos \theta}$ ，稱為正割（secant）。兩者由巴坦尼發現，而波斯數學家兼天文學家阿布瓦法（Abu al-Wafa al-Buzjani，940 – 998）則正式使用，並研究了六個三角函數的關係。

十三世紀，波斯天文學家納西爾·丁·圖西 (Nasir al-Din al-Tusi, 1201 – 1274) 著《論四邊形》(Treatise on the Quadrilateral)，使三角學自成系統，不再附屬天文學。相同想法，在歐洲，則要到 1464 年由繆勒著的《論各種三角形》提出。

1551 年，德奧數學家兼天文學家雷提克斯 (Georg Joachim Rheticus, 1514 – 1576) 著《三角函數準則》(Canon doctrinae triangulorum) 完全收入正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割這六種函數，並以直角三角形，而非圓形，定義正弦。

符號 $\sec$ ，由生於法國而長居荷蘭的數學家吉立德 (Albert Girard, 1595 – 1632) 在 1626 年出版的《三角學》(Trigonométrie) 首次提出，而餘割未有統一符號。

其他

除了這六個函數，史上還有正矢 (versine)、餘矢 (coversine)、半正矢 (haversine)、半餘矢 (hacoversine 或 cohaversine)、外正割 (exsecant)、外餘割 (excosecant) 等，定義如下：

$$\text{versin } \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\text{coversin } \theta = 1 - \sin \theta$$

$$\text{haversin } \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\text{hacoversin } \theta = \frac{1 - \sin \theta}{2}$$

$$\text{exsec } \theta = \sec \theta - 1 = \frac{1}{\cos \theta} - 1$$

$$\text{excosec } \theta = \text{cosec } \theta - 1 = \frac{1}{\sin \theta} - 1$$

以圖概括如下³⁶：

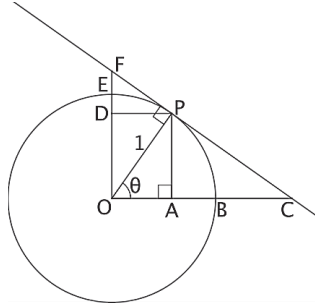


圖 3

1631 年，德國天主教耶穌會傳教士鄧玉函（Johann Schreck，1576 – 1630）和湯若望（Johann Adam Schall von Bell，1591 – 1666）與徐光啟合編《大測》，並附《割圓八線表》，後來徐光啟編《測圓八線表》，皆以「八線」（正餘弦、正餘切、正餘割、正餘矢）稱三角學。薛鳳祚（1600 – 1680）和波蘭傳教士穆尼閣（Jan Mikolaj Smogulecki，1610 – 1656）合著《三角算法》，則用到「三角」之名，後人也沿用這個名稱。1935 年，中國數學會數學名詞審查委員會定為三角學、三角法或三角術，並見於 1945 年出版的《數學名詞》。1974 年，《英漢數學詞匯》才統一定名為三角學（而日本仍用三角術）。

參考文獻

三角函數的名稱與符號。龍騰教師手冊。2020 年 1 月 24 日，取自 http://lms.tnssh.tn.edu.tw/sys/read_attach.php?id=55087

陳昱君、林佩君、陳思絮。三角學的發展史。2020 年 1 月 24 日，取自 <http://203.72.63.136/%E5%9C%96%E6%9B%B8%E9%A4%A8%E6%B4%BB%E5%B%95/%E5%B0%8F%E8%AB%96%E6%96%87%E5%84%AA%E7%A7%80%E4%BD%9C%E5%93%81/%E4%BD%9C%E5%93%81%E6%AA%94%E6%A1%88/980331/108%E6%9E%97%E4%BD%A9%E5%90%9B%E7%AD%89-%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%AD%B8%E7%9A%84%E7%99%BC%E5%B1%95%E5%8F%B2.pdf>

36 OA = 餘弦，AB = 正矢，BC = 外正割，OC = 正割，OD = 正弦，DE = 餘矢，EF = 外餘割，OF = 餘割，PC = 正切，PF = 餘切

數學教育第四十二期 (6/2020)

銳角三角函數引入。2020年1月24日。取自
<http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Ctrl/OpenFileContent.ashx?id=B3CDDQTR4D648R446HB2QCDC3QQC63T6FR6TBXQ2R3TC4464TR4G64BXQ2DQ344R>

History of trigonometry. Retrieved January 24, 2020, from
https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry

Trigonometry. Retrieved January 24, 2020, from <https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry>

Trigonometry. Retrieved January 24, 2020, from
<https://www.britannica.com/science/trigonometry>

作者電郵：charleskwok1018@gmail.com