$\sqrt{2}$是無理數的一束證明

賴煒諾
聖保羅男女中學
蕭文強
香港大學數學系

1. 引言

$\sqrt{2}$ 是無理數這一回事，大家必定耳熟能詳，甚至能舉出好幾個不同的證明。這些不同的證明是否真的不同呢 ？以下再談。既然大家對這一回事耳熟能詳，為什麼還要就這個課題撰文呢？還有什麼可以添加呢？

撰寫本文的原因有兩個：

其一：對一條定理作不同的證明，目的是要尋求更深入的理解，從而化簡，或推廣，並且探究可否引申至別的課題。數學史上有很多這方面的例子，古代數學較著名的有畢氏定理〔Pythagoras' Theorem〕，中國稱作勾股定理；現代數學較著名的有二次互反律〔Law of Quadratic Reciprocity〕。前者的證明，多得不可勝數，美國數學家 Elisha Scott Loomis 在二十世紀上半期搜集了三百七十個證明，編成一冊 *The Pythagorean Proposition* [7]。後者的證明，單是德國數學大師 Carl Friedrich Gauss 便已經在 1801 至 1818 年間提出六個證明；美國數學家 Murray Gerstenhaber 甚至在 1963 年寫了一則只有一頁長的文章，開玩笑地把題目定為「關於二次互反律的第一百五十二個證明」[5]！德國數學家 Franz Lemmermeyer 設立了一個網頁
[http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/fchrono.html]，
更列舉了二百四十多個有關二次互反律及其推廣的證明。

其二：說起來有段故事，與兩位作者有關。作者之一，有緣結識另一位比他年紀相差達一個甲子的小友（即是另一位作者）。小友就讀喇沙小學六年級期間鑽研此課題，有一次，他告訴另一位作者，他寫下了 $\sqrt{2}$ 是無理數的廿多個證明，並抽取其中十個左右，拍成一輯 *YouTube*
[https://www.youtube.com/watch?v=xnxx8JOgPlA&t=339s]，
詢問另一位作者的意見。另一位作者在 1997 年曾經在本地數學雜誌發表了

一則短文[2]，文章結尾有一句話：「上面討論的六個證明，真的是六個不同的證明嗎？還是六個相同的證明呢？」於是，他向小友建議，不妨審視一下眾多證明的相互關係、分類、推廣等等，本文就是這番工夫的一個初步報告和讀書箚記。當時，剛升上喇沙書院中一年級的小友，與另一作者合作寫成此文。

2. 算術形式和代數形式的闡述

以下我們打算介紹一束 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，並且闡明它們之間的關係。有些證明稍作修改便適用於 $\sqrt{2}$ 以外的平方根，其至開方以外的 n 次根，以致更一般的代數整數〔algebraic integer〕，即是整數系數及首項數為 1 的代數方程的根。讀者不妨把證明逐一審視，看看那一個證明有這種推廣，不失為一個有益的習作。

$\sqrt{2}$ 是無理數的意思，即是說 $\sqrt{2}$ 不是形如 p/q，其中 p 和 q 都是正整數；不妨設 p 和 q 無大於 1 的公共因子，或者說，p/q 是不可約的最簡分數。以下文中每出現 p 和 q，p 和 q都是正整數。

第一個證明當然是大家熟悉的經典證明，是最早出現於文獻上的證明，見諸於 Aristotle 的名著《前分析篇》〔*Prior Analytics*〕（公元前 350 年左右），用作反證法的示範。它也是最簡潔的證明，只用到奇偶數而已。設 $\sqrt{2}$ 形如 p/q，p 和 q 無大於 1 的公共因子，特別地，p 和 q 不同為偶數。由於 $p^2 = 2q^2$，故 p^2 為偶數，即 p 亦為偶數，寫作 $p = 2r$， r 是某個正整數。由此得到 $4r^2 = 2q^2$，故 $q^2 = 2r^2$ 也是偶數，即 q 亦為偶數。p 和 q 同為偶數，矛盾！

如果考慮 $\sqrt{a}$ ，a 為質數〔prime number〕，上面的簡潔證明可稍為修改，單是奇偶數不夠用，需要運用算術基本定理〔Fundamental Theorem of Arithmetic〕，即是說，任何正整數必有唯一質因子分解式（次序不計）。設 $\sqrt{a}$ 形如 p/q， p 和 q 無大於 1 的公共因子。由於 $p^2 = aq^2$ ，a 整除 p^2，故 a 亦整除 p （這兒利用了 a 是質數的性質）。置 $p = ar$， r 是某個正整數，則，$a^2r^2 = aq^2$ ，$q^2 = ar^2$，故 a 整除 q^2，故 a 亦整除 q 。因此 a 是 p 和 q 大於 1 的公共因子，矛盾！

我們也可以換一個角度看，設 $p = p_1^{s_1} \cdots p_m^{s_m}$，$q = q_1^{t_1} \cdots q_n^{t_n}$，$p_1$ 至 p_m 及 q_1 至 q_n 是互不相同的兩組質數（因為 p 和 q 無大於 1 的公共因子），

取其當中最大的一個，把它叫作 M 。由於 $p^2 = aq^2$ ，有 $p_1^{2s_1} \dots p_m^{2s_m} = aq_1^{2t_1} \dots q_n^{2t_n}$ 。M 不能是 q_1 至 q_n 當中的一個，否則 M 在左式出現卻不在右式出現，矛盾！ M 也不能是 p_1 至 p_m 當中的一個，否則 a 必定是 M ，因為 M 在右式出現卻不是 q_1 至 q_n 當中一個。把 M 在左式和右式中消掉，左式仍然出現 M，右式卻再沒有 M，矛盾！

其實，只用留意到在 $p^2 = aq^2$ 中， p^2 的質因子分解式有偶數個質因子，但 aq^2 的質因子分解式卻有奇數個質因子（多了一個 a），按照算術基本定理，便馬上得到矛盾了！如果 a 不是質數又如何呢？首先，若 a 是個完全平方，$\sqrt{a}$ 是有理數（其實是個整數），所以只需考慮 a 不是個完全平方的情況，也就是說，在 a 的質因子分解式中，不可能每個質因子的次數都是偶數，其中必有某個因子 $a_i^{r_i}$ （a_i 是質數）的次數 r_i 是奇數。在 $p^2 = aq^2$ 中，由於 p 和 q 無公共因子，這個 $a_i^{r_i}$ 必須在 p^2 的質因子分解式中出現，但所有在 p^2 的質因子分解式中出現的質因子次數皆為偶數，此乃矛盾！

還有一個更簡單的證明，也是始於 $p^2 = aq^2$ ， p 和 q 無大於 1 的公共因子。由於 p^2 和 q^2 亦無大於 1 的公共因子，故必有 $q^2 = 1$ ，即 $q = 1$（或 $q = -1$）。於是， $a = p^2$ 是個完全平方。若 a 不是個完全平方，$\sqrt{a}$ 是無理數。

上面的證明，可以推廣至 a 的 n 次根，a 並非是 n 次冪的情況。為了更好解釋這回事，讓我們一下子跳到一般情況，設 $X = p/q$（p 和 q 無大於 1 的公共因子）是代數方程

$$X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0 = 0$$

的有理數根，其中系數 $c_{n-1}, \cdots, c_1, c_0$ 都是整數，從而證明 X 其實是整數。如果證明了這樣的一條定理，便把它運用於方程 $X^n - a = 0$，得知若 a 不是 n 次冪，則 a 的 n 次根必為無理數。要證明上述定理不是太難，第一步在方程代入 $X = p/q$ ，得

$$p^n + c_{n-1}p^{n-1}q + c_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + c_1pq^{n-1} + c_0q^n = 0，$$

故 $p^n = q\,[c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + c_1pq^{n-2} + c_0q^{n-1}]$ ，故 q 整除 p^n 。但 p 和 q 無大於 1 的公共因子，故 $q = 1$ 或 $q = -1$，也就得知 X（是 p 或是 $-p$）是個整數。凡是滿足系數是整數而且首項是 1 的代數方

程的根稱作代數整數，於是我們證明了以下的定理：既是代數整數又是有理數的(複)數必定是整數。這條定理最簡單的特殊情況就是有數千年歷史的經典結果：$\sqrt{2}$ 是無理數。

讓我們暫時離開質因子分解、整除性質這類話題，試尋找別的途徑去解釋為何 $\sqrt{2}$ 是無理數。設 $\sqrt{2} = p/q$，則 $\sqrt{2}q\ (= p)$ 是正整數，選取一個最小的正整數 q 滿足這回事。我們設法尋找一個比 q 更小的正整數 r 滿足這回事，即得矛盾！如開首所言，p 是偶數，置 $p = 2r$，r 是某個正整數。注意到 $r = p/2 < q$（因為 $p = \sqrt{2}q < 2q$），而且

$$\sqrt{2}r\ (= \frac{\sqrt{2}p}{2} = \frac{p}{\sqrt{2}} = q)$$

也是正整數，於是 r 是一個比 q 更小而滿足這回事的正整數，矛盾！

還有另一個方法，就是考慮 $k = p - q$，它是一個比 q 更小的正整數（因為 $2q > \sqrt{2}q = p$），而且 $\sqrt{2}k\ (= \sqrt{2}(p-q) = 2q - p)$ 也是正整數，這是因為

$$(2q-p)/(p-q) = (2q - \sqrt{2}q)/(\sqrt{2}q - q) = (2-\sqrt{2})/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

於是，k 是另一個選擇，由此得矛盾！讀者可能產生一些疑惑，怎麼想到選取 $k = p - q$ 呢？這將引來一段故事，容後再談（見下一節）。目前讓我們回到先前的那個證明，從 $\sqrt{2} = p/q$ 得到 $\sqrt{2} = q/r = q/(p/2)$，類似地，可以由此得到 $\sqrt{2} = r/(q/2) = (p/2)/(q/2)$ 等等，數學上對這種導致矛盾的思路叫做無窮遞降法〔infinite descent〕。

以上介紹的無窮遞降法，帶來另一個運用不等式作估計的手法，不妨在這兒敘述。設 $\sqrt{2} = p/q$，p 和 q 無大於 1 的公共因子。對任何正整數 m，$(\sqrt{2}-1)^m$ 必是形如 $\sqrt{2}r - s$，r 和 s 是某對整數，例如

$$(\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}(-2) - (-3)，(\sqrt{2}-1)^3 = \sqrt{2}(5) - 7 \text{ 等等。}$$

注意到

$$|(\sqrt{2}-1)^m| = \left|\sqrt{2}r - s\right| = |(pr - qs)/q| \geq 1/q，$$

這是因為 $pr - qs \neq 0$，否則便有 $\sqrt{2} = 1$，矛盾！但是，當 m 增大時，$|(\sqrt{2}-1)^m|$ 卻相應地減少（這是因為 $0 < \sqrt{2}-1 < 1$），而且當 m 是足夠大的時候，$|(\sqrt{2}-1)^m|$ 必小於 $1/q$，此乃矛盾！這個證明 $\sqrt{2}$ 是無理數的

方法雖然看來遠遜於前面多個證明的簡潔程度，但我們可以從中學到一些別的東西。

3. 幾何形式的闡述

現在，讓我們回頭再看看上一節那個證明，取 $k=p-q$ 。那其實是數論專家 Theodor Estermann 在 1975 年發表於 *Mathematical Gazette* 上的證明，文章只有短短一頁[3]。後來有人讚曰：「如同所有的精采念頭，一經指出即明顯不過，但這個精采念頭卻要等到 Pythagoras 二千多年後才給指出來！」(見[10]。)

古人是否真的從來沒有這個念頭呢？其實，如果我們試圖探究如何選取 $k=p-q$ 這條線索，自然會問：這個等式有何幾何詮譯？因為古代希臘數學家最精通的研究正是幾何。(見[11]。)

不妨取一個等腰直角三角形 ABC ，AB 和 CB 的邊長為 q ，AC 邊長為 p。由畢氏定理得知 $p^2=2q^2$ ，即 $\sqrt{2}=p/q$。在 AC 上取一點 B_1 使 $CB_1=CB=q$，再自 B_1 構作垂直於 AC 的直線，與 AB 相交於 C_1(見圖 1)。

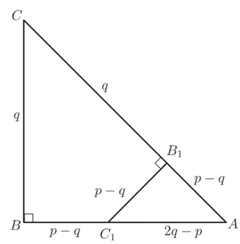

圖 1

於是有 $C_1B=C_1B_1=AB_1=p-q$ ，$AC_1=AB-C_1B=q-(p-q)=2p-q$ 。由於三角形 ABC 和三角形 AB_1C_1 相似，得知

$$AC_1:C_1B_1=AC:CB，$$

即 $(2p-q)/(p-q)=p/q=\sqrt{2}$ ，那不就是在第二節出現的那條涉及 $k=p-q$ 的等式嗎？

如果我們使用輾轉丈量法把這個構作方法連續施用於一個正方形及其對角線上（見圖 2），便能證明正方形的對角線及其邊是不可公度量

〔incommensurable magnitudes〕。有些數學史家相信這是二千五百年前希臘數學家發現不可公度量的經過，但也有些數學史家相信更可能的經過是把輾轉丈量法施用於一個五角星形〔pentagram〕(見圖 3)，因為 Pythagoras 學派的標誌正是五角星形。正五邊形的對角線 AC 及其邊 CD 是不可公度量，等於說 $(\sqrt{5}+1)/2$ 是無理數。

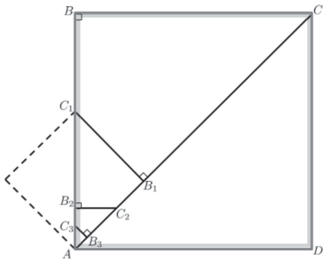

圖 2

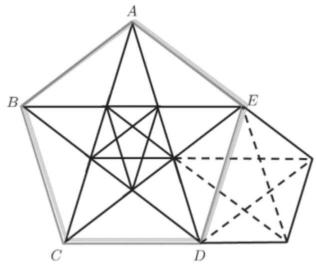

圖 3

順帶交代一句，輾轉丈量法幾千年前在古代東西方數學都出現，是個非常重要的算法。在古代中國經典名著《九章算術》頭一章出現，叫做「更相減損術」，在古代希臘經典名著 Euclid 的《原本》〔*Elements*〕第七章出現，後世稱之為歐氏算法〔Euclidean algorithm〕。

什麼叫做可公度量（和不可公度量）呢？那是古代希臘數學家的用語，意指存在一個公共度量 AP，使度量 AC 和 AB 各自是 AP 的若干整數倍。（在這兒我們不花篇幅詳細說明度量的意思，讀者不妨把它看作是幾何度量，例如線段的長。）用今天的數學語言，即是說 $AC = pAP$ 和 $AB = qAP$，p 和 q 是某正整數，亦即 $AC/AB = p/q$，或者說 AC/AB 是有理數。Aristotle 在《前分析篇》說的，就是正方形的對角線及其邊是不可公度量，等於說 $\sqrt{2}$ 是無理數。古代希臘的敘述是以幾何語言表達，第二節起首利用奇偶性質的簡潔證明，是以今天中學生習用的數學語言把 Aristotle 的敘述翻譯過來吧。

古代希臘數學家初時深信任何兩個度量是可公度量，只用取足夠小的公共度量便成。看來那也是頗自然而且符合當時 Pythagoras 學派奉為圭臬的原則：「萬物皆(整)數」。後來學派中有人發現有些度量是不可公度量的，有如晴天霹靂，動搖了某些數學理論的根基！後世有人稱此謂「第一次數

學危機」，為數學發展帶來深遠影響，直至十九世紀中期以後發展起來的實數〔real numbers〕理論，也可見其影子！（有興趣的讀者，可以閱讀[1]。）

在圖 2 中設 AP 是正方形的對角線 AC 及其邊 AB 的公共度量，有 $AC = pAP$ 和 $AB = qAP$ 。在 AC 上取一點 B_1 使 $CB_1 = CB$ ，自 B_1 構作垂直於 AC 的直線，與 AB 相交於 C_1。注意到 AC_1 和 AB_1 是一個較小的正方形的對角線和邊，而且較小的正方形的邊 AB_1 小於原來正方形的邊 AB 的一半。按此步驟重複做下去，必定得到一個足夠小的正方形，它的邊 AB_t 小於 AP ，但 AP_t 卻仍然是 AP 的若干整數倍，豈非矛盾！（讀者是否在這推論中見到無窮遞降法的影子呢？）

有些數學史家認為古代希臘數學家在公元前四世紀初曾經一度企圖用這種輾轉丈量法研究不可公度量，相當於企圖建立一套基於今天稱作連分數表示〔representation by continued fraction〕的實數理論，可惜當時無功而退，至公元前 370 年左右被 Eudoxus 建立的比例理論取代以解決「第一次數學危機」，於是這個非常有意思的嘗試湮沒無聞，只在 Euclid 的經典著述《原本》後來數章中留下了蛛絲馬跡。（有興趣的讀者，可以參考以下兩本書：[4]，[6]。）

現在，讓我們從連分數表示這個角度證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。在這兒我們不打算介紹連分數的一般理論，已經有不少書本可供參考（例如 [8]）。有一種連分數叫做有限連分數，化簡後是個有理數而已，例如

$$2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}} = 2+\frac{1}{\frac{13}{3}} = 2+\frac{3}{13} = \frac{29}{13} \text{ 。}$$

事實上，任何有理數都能夠寫成這種有限連分數表示。另一種連分數叫做無窮連分數，由它產生的部份截斷連分數表示組成的數列，收斂於某個實數，該數必定是無理數。例如 $\sqrt{2}$ 的無窮連分數表示是

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\\ &= 1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}\\ &= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}\\ &= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+(1+\frac{1}{\sqrt{2}+1})}}\end{aligned}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

讀者是否留意到這個連分數表示的幾何表述形式正如圖 2 所示呢？或者說，圖 2 的算術表述形式，就是上面 $\sqrt{2}$ 的連分數表示。

4. $\sqrt{2}$ 是無理數的「割雞用牛刀」證明

這一節介紹兩個證明，用到的數學內容，較前面用到的是較深刻，看來有「割雞用牛刀」之嫌。但藉此介紹一些有趣的數論知識，希望讀者喜歡吧。當中用到的數論知識，在很多數論的入門課本都能找到，這兒不贅，讀者可以參看例如 [9]。

頭一個證明利用德國數學家 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 在 1837 年發表的一條定理：在首項及公差互質的算術數列〔arithmetic progression〕中，有無限個質數。即是說，有無限多個質數形如 $a + kd$ ，a 和 d 是互質的正整數，k 是任何正整數。引入模算術〔modulo arithmetic〕的語言，可以把這件事描述得更簡捷，也方便繼續的討論。我們說整數 a 和 b 模 d（d 是正整數）同餘的意思，是指 $a - b$ 為 d 整除，或者說 $a - b = kd$ ，k 是某整數。數學上，我們寫作 $b \equiv a \pmod{d}$。Dirichlet 的定理就是說：若 a 和 d 是互質的正整數，有無限多個質數與 a 模 d 同餘。設 $\sqrt{2} = p/q$ ， p 和 q 是正整數。首先找一個大於 q 的奇質數 L，使 $L \equiv 3 \pmod{8}$。由於 L 大於 q，必定有正整數 q' 使 $qq' \equiv 1 \pmod{L}$ ，這兒用到模算術的基本知識，不贅。取 $t = pq'$ 。由於

$$t^2 \equiv (pq')^2 \equiv p^2(q')^2 \equiv 2q^2(q')^2 \equiv 2(qq')^2 \equiv 2 \pmod{L},$$

得知對模 L 而言，2 是個完全平方。用數論的術語，我們說對模 L 而言，2 是個二次剩餘〔quadratic residue〕。數論有一條著名法則，用以驗證對模 m 而言（ m 是奇質數），給定的正整數 a 是否二次剩餘。這條由瑞士數學大師 Leonhard Euler 在 1748 年提出的法則，只用計算 $a^{(m-1)/2} \pmod{m}$ 。若答案是 1， a 便是二次剩餘；若答案是 -1， a 便不是二次剩餘。為了計算 $2^{(m-1)/2}$ ，我們可以再運用另一位數學大師 Gauss 在 1808 年證明的一個有用的結果，後來叫做 Gauss 引理〔Gauss' Lemma〕，只用數一數

$$a、2a、3a、\cdots、(m-1)a/2 \pmod m$$

當中有多少個是大於 $m/2$ 。利用這條引理，便能夠推論對模 L 而言，2 是個二次剩餘的充分與必要條件是 $L \equiv 1 \pmod 8$ 或者 $L \equiv -1 \pmod 8$ 。既然我們特意選了 L 滿足 $L \equiv 3 \pmod 8$ ，便出現矛盾！

第二個證明更顯得做作，但藉此可以引進一個深刻的數論難題，自十世紀末給提出後至今猶未有完全的解答，而且，這道難題與近世代數幾何及代數數論有密切關連。這個稱作合同數問題〔Congruent Number Problem〕，是要描述全部滿足以下條件的正整數 n：n 是某個邊長皆為有理數的直角三角形的面積之值。最初提出來的問題並非是這個樣子，它是要尋找三個平方數 A^2、B^2、C^2 ，使 $A^2-B^2=B^2-C^2=n$ ， n 是已給定的正整數。有那些 n 是有解的？（讀者可以試證明這兩種提法是邏輯等價的。）我們把這些正整數叫做合同數，例如 6 是一個例子，它是邊長為 3、4、5 的直角三角形的面積之值；5 也是一個例子，它是邊長為 3/2、20/3、41/6 的直角三角形的面積之值。奇怪地，有些合同數雖然是某個邊長皆為有理數的直角三角形的面積之值，卻不可能是某個邊長皆為正整數的直角三角形的面積之值。而且，要判斷有沒有某個邊長皆為正整數的直角三角形的面積是 n ，並不是很難的事（讀者不妨試一試）。換了邊長是有理數，問題的困難程度卻陡然提高！

我們將要證明 2 不是一個合同數，所以 $\sqrt{2}$ 是無理數，否則邊長為 2、2、$\sqrt{2}$ 的直角三角形便滿足 2 是合同數的條件！怎樣知道 2 不是合同數呢？法國數學家 Pierre de Fermat 在 17 世紀中葉已經利用無窮遞降法證明了 $x^4+y^4=z^2$ 沒有整數解，由此可以推論 $X^4+1=Z^2$ 沒有有理數解。所以，2 不是合同數。否則，有邊長皆為有理數 a、b、c 的直角三角形的面積是 2（故 $ab=4$ ， c 為斜邊之長）；置 $X=a/2$，$Z=ac/4$ ，便得到 $X^4+1=Z^2$ 的有理數解了！讓我們再介紹另一個近期得多的定理，是 Jerrold B. Tunnell 在 1983 年提出一個 n 是合同數的必要條件，而且只要知道另一個著名的 BSD 猜想〔Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture〕成立的話，這個必要條件也是充分的[13]。這個著名的 BSD 猜想，是兩位英國數學家 Bryan John Birch 和 Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer 在 1965 年提出來的。在這兒我們不打算把 Tunnell 定理的內容完整地仔細寫出來，只看 $n=2$ 的情況。2 是合同數的必要條件是方程 $2=8x^2+2y^2+16z^2$ 的整數

解 (x, y, z) 的數目等於方程 $2 = 8x^2 + 2y^2 + 64z^2$ 的整數解 (x, y, z) 的數目的兩倍。容易見到這兩條方程的整數解都只有兩個，即是 $(0, 1, 0)$ 和 $(0, -1, 0)$，故必要條件不成立，2 並非是合同數。

5. 結語

最後我們再介紹多一個證明，用了圖解表述。奇怪之處是那幅圖（見圖 4）根本是沒有可能畫出來的（因為 $\sqrt{2}$ 不是有理數），但它卻展示了這一個反證法的底蘊！按照常理，反證法是由不成立的命題出發，應該是不能畫圖說明的。

設 $\sqrt{2} = p/q$ 是不可約的最簡分數，在 $p \times p$ 點陣（見圖 4 的正方形 $ABCD$）內，右上角和左下角的 $q \times q$ 點陣（$EYFD$ 和 $GBHZ$）的點合起來正好與原來 $p \times p$ 點陣的點有相同數目（因為 $p^2 = 2q^2$）。因此，這兩個 $q \times q$ 點陣的交疊部份，是一個 $K \times K$ 點陣（$XYWZ$），它的點的數目正好是左上角和右下角的 $k \times k$ 點陣（$AGXE$ 和 $WHCF$）的點合起來的數目。即是說 $K^2 = 2k^2$，或 $\sqrt{2} = K/k$。但是 $K < p$ 和 $k < q$，與 p 和 q 的選取矛盾！

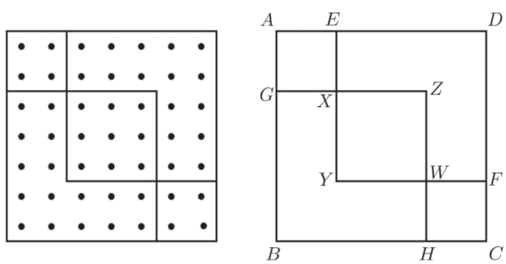

圖 4

這個巧妙的圖解證明，來自一篇刊登於 1971 年的文章 [14]。如果我們比對一下第 2 節那個涉及 $k = p - q$ 的證明，是否又回到 Estermann 的簡短證明呢？（見 [12]。）

至此，我們介紹了十多個 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。雖然，每個證明的重點不同，數學味道也有分別，但有沒有使讀者產生第一節結尾提出的感想：這眾多不同的證明，是否真的完全不同呢？

參考資料

[1] 梁子傑（2016）。《三次數學危機與勇闖無窮大》。香港：教育局課程發展處數學教育組。

[2] 蕭文強（1997）。$\sqrt{2}$ 是無理數的六個證明。《Datum》36 期，14 – 17。

[3] Estermann, T. (1975). The irrationality of $\sqrt{2}$. *Mathematical Gazette*, *59*(408), 110.

[4] Fowler, D. H. (1999). *The mathematics of Plato's Academy : A new reconstruction* (2nd edn.). Oxford: Clarendon Press.

[5] Gerstenhaber, M. (1963). The 152nd proof of the law of quadratic reciprocity. *American Mathematical Monthly*, *70*, 397 – 398.

[6] Knorr, W. R. (1975). *The evolution of the Euclidean 'Elements'*. Dordrecht: Reidel.

[7] Loomis, E. S. (1940). *The Pythagorean Proposition* (2nd edn.). Ann Arbor: Edwards Brothers.

[8] Olds, C. D. (1963). *Continued fractions*. New York: Random House.

[9] Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory and applications* (6th edn.). Reading: Addison-Wesley.

[10] Roth, K. & Vaughan R. C. (1994). Obituary of Theodor Estermann. *Bulletin of the London Mathematical Society*, *26*, 593 – 606.

[11] Siu, M. K. (1998). Estermann and Pythagoras. *Mathematical Gazette*, *82*(493), 92 – 93.

[12] Siu, M. K. (2013). Some more on Estermann and Pythagoras. *Mathematical Gazette*, *97*(539), 272 – 273.

[13] Tunnell, J. B. (1983). A classical Diophantine problem and modular forms of weight 3/2. *Inventiones Mathematicae*, *72*, 323 – 334.

[14] Waschkies, H.-J. (1971). Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Größen durch die Griechen. *Archive for History of Exact Sciences*, *7*, 325 – 353.

第一作者電郵：ferguswl.lai@gmail.com