

## 走進圓面積的歷史啟發教學設計

鍾嘉欣

東華三院鶴山學校

### 摘要

源遠流長的數學歷史中，向人們一一細訴着每位數學家的貢獻、每道公式成立的意義，甚至每個數學符號的由來，讓人們了解數學的本質，並體現數學發展如何促進人類文明社會的建立。筆者認為作為數學老師，除了向學生教授數學知識、建構概念外，更肩負着把數學歷史傳承下去的責任。且若老師能透徹認識數學歷史，有助他們理解、組織和詮釋數學概念，提升教學質素。

適逢本港小學數學的新課程將於未來幾年陸續推行，課程改革中重組和加入了不少新課題。因此，筆者有意從新課程中揀選圓面積公式一課作探究，一來嘗試透過認識圓面積的數學歷史來設計教學活動，讓學生推論出圓面積公式，二來及早知道學生在過程中遇到的學習難點，並藉本文與同工分享，以助日後推行新課程時能更掌握課題的教學重點。

## 引言

看似簡單的圓形，數學家卻花了幾千年時間才找出圓的半徑與它周界和面積的關係，而現時小學數學課程中，學生在六年級便能學習到圓周率、圓周的公式和運算等，在將推行的新課程中更加入圓面積公式和運算（見表 1）。為及早準備小學數學新課程內容和了解教學難點，本文以圓面積公式作探究課題，先認識數學家計算圓面積的歷程，藉此設計教學活動讓學生推論圓面積公式，鞏固他們對公式的理解，隨後再反思活動的教學成效。

表 1 新課程中圓面積的教學內容

| 學習單位             | 學習重點       | 注釋                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6M5<br>面積<br>(三) | 1. 認識圓面積公式 | <p>學生可通過以下方法認識圓面積公式：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>把一張圓形的紙先對摺成 4 等分，再摺成 8、16 .....等分，讓學生看出每分的形狀接近一個三角形，從討論這些近似三角形的面積探究圓面積公式。</li> </ul>  <p>教師可鼓勵學生認識古代中國數學家求圓周率的故事，惟不著重解釋計算方法，只須認識中國數學家在這方面的成就。</p> |
|                  | 2. 應用圓面積公式 | <p>學生只須使用 <math>\frac{22}{7}</math> 或 3.14 作為 <math>\pi</math> 的近似值進行計算。</p> <p>學生不須：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>從一個圓的面積求它的直徑或半徑</li> <li>求扇形面積</li> </ul>                                                                                                                         |

（擷錄自《數學教育學習領域課程指引補充文件：  
小學數學科學習內容（2017）》）

## 圓面積公式的歷史

尋找圓的面積前，人們已掌握多邊形面積的測量。如長方形面積，人們可數算長方形內覆蓋多少個 1 平方單位的正方形來求得它的面積（見圖 1）。但套用到圓形時，因  $\pi$  是無理數，無法與有理數通約，使人們不能準確數算圓的面積，這對不同文明的數學發展都帶來重大的挑戰。

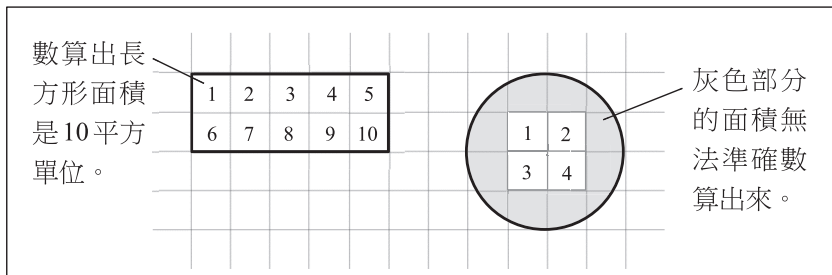


圖 1 數算長方形和圓形的面積

然而，人們仍努力尋求和嘗試不同的方法找出圓面積，主要分為三個階段：測量、正多邊形逼近和微積分。首先在測量階段，古人量度圓形物件的直徑、圓周來找出與圓面積的關係，訂立計算圓面積的方法，如巴比倫人會把圓周平方後除以 12、埃及人把直徑先減去  $\frac{1}{9}$  後再進行平方等（張琇如，2007）。在第二階段，安提豐（Antiphan）、劉徽等數學家運用正多邊形的面積逼近來找出圓面積公式，能更準確計算圓面積。第三階段隨着高等數學發展，數學家透過微積分證明圓面積公式為  $\pi r^2$ 。為配合小學數學新課程的內容，本文進一步探討劉徽的割圓術，從而設計相關的教學活動。

## 割圓術的概念

割圓術是藉着不斷培增正多邊形的邊數，使其面積逼近圓的面積（蔡聰明，1996）。首先，劉徽從圓內接正六邊形作開始（見圖 2），圖中灰色部分是正六邊形與圓形的面積差，若此時把正六邊形面積直接當作圓面積並不準確。於是，劉徽把各個扇形的弧分作一半，畫上標記，並與原來的正六邊形頂點相連，使邊數培增兩倍形成正十二邊形，而同時與圓形的面積差減少了，表示正十二邊形的面積較接近圓面積。

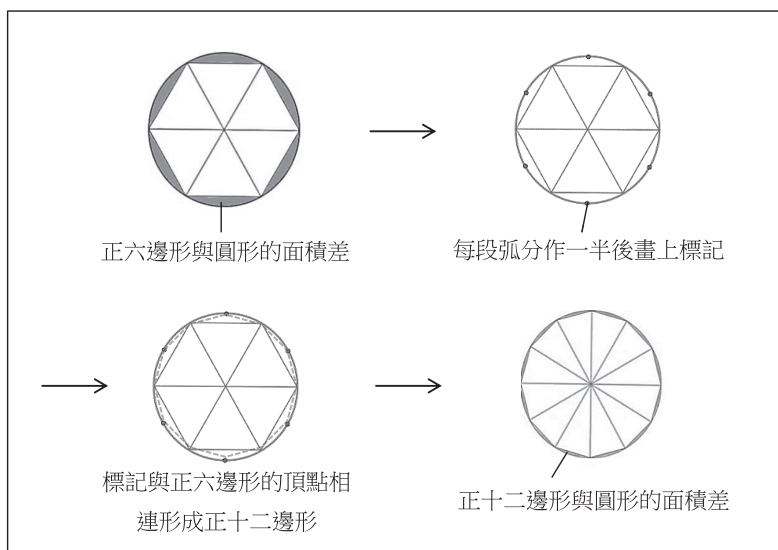


圖 2 由圓內接正六邊形培增成圓內接正十二邊形

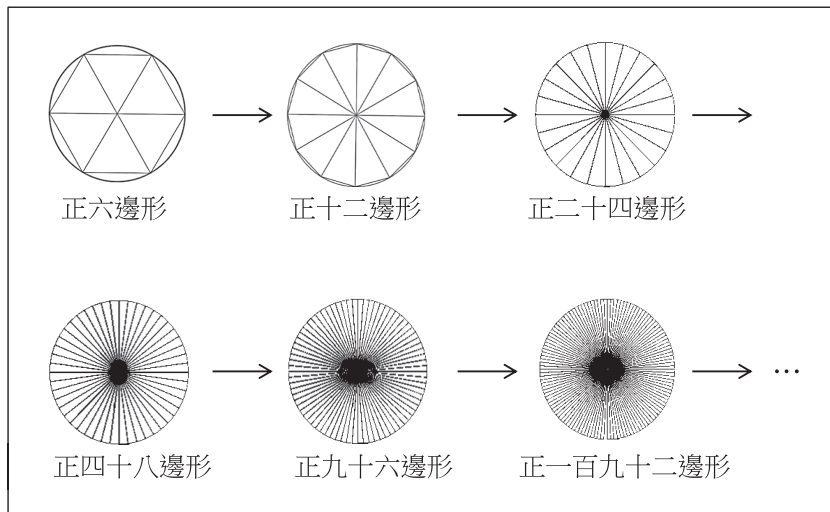


圖 3 圓內接正多邊形不斷培增

透過同樣的方法不斷倍增邊數成正二十四邊形、正四十八邊形……隨着正多邊形的邊數增加，正多邊形面積越接近圓面積（見圖 3）。因此，劉徽認為把圓形不斷分割得越來越細，直到不能再分割時，形成正無限多邊形。這正無限多邊形面積會與圓面積完全重合，因此藉正無限多邊形面積的極限便可求得圓面積（蘇俊鴻，1999）。

### 推證圓面積公式

接着，劉徽運用出入相補的原理來求出正無限多邊形面積。出入相補的原理闡明了一個平面圖形可任意切割成多塊任何形狀的小圖形，這些小圖形的面積之和等於原來的平面圖形面積，且經移動後平面圖形的面積保持不變。故此，劉徽把圓內接正十二邊形和圓內接正二十四邊形分割成細小的扇形（見圖 4），再重排成長方形（洪萬生，1978）。從結果可見，正二十四邊形分割成較多的扇形，扇形越小，扇形的弧越接近長方形的長。

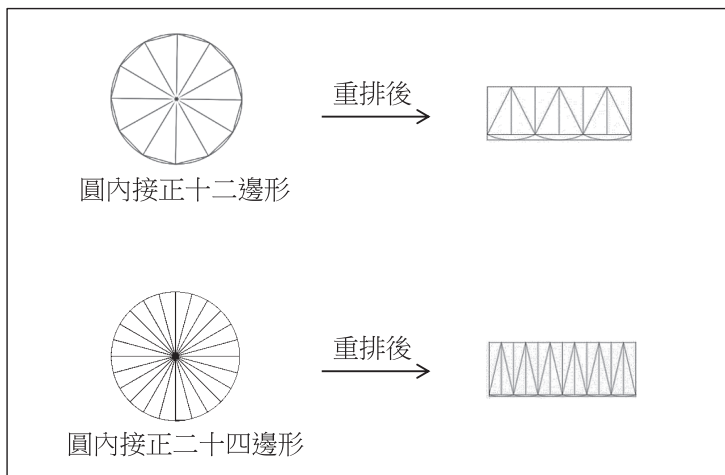


圖 4 圓內接正十二邊形和正二十四邊形的重排

直到圓內接正無限多邊形時，圓形分割成無限多個極小的扇形（見圖 5），扇形的弧最終會化曲為直，成為真正的三角形。經重排後形成長方形，當中長是圓周的一半，闊是半徑。藉着長方形面積，即扇形面積之和，

與圓面積相等，可由長方形面積公式「長  $\times$  闊」來推證圓面積公式，並得出劉徽記載的結果「半周半徑相乘得積步<sup>1</sup>」。

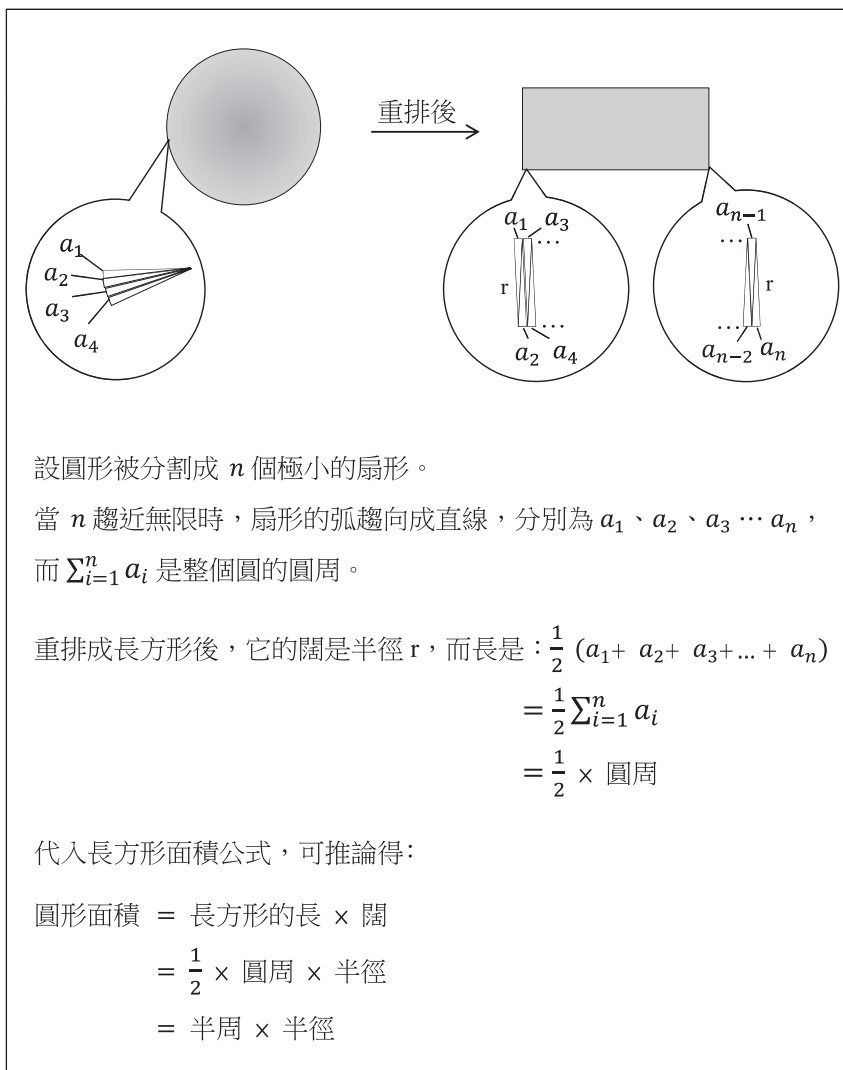


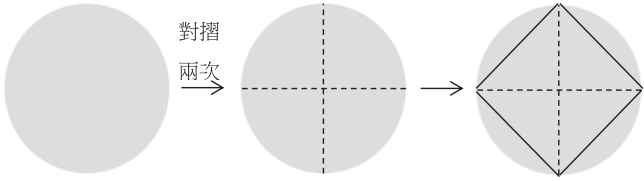
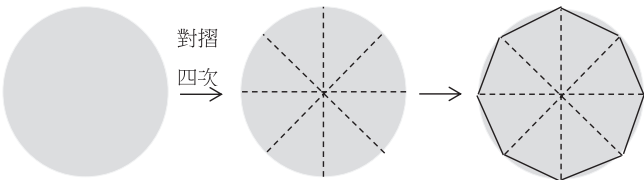
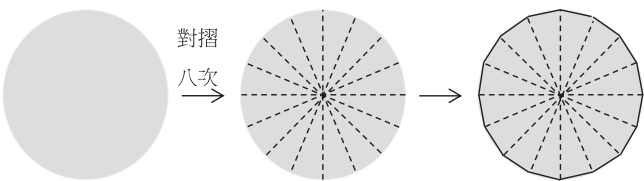
圖 5 圓內接正無限多邊形的分割與面積公式

1 出自《九章算經》方田章的圓田術，積步意指面積。

## 教學設計與檢討

是次的教學設計有兩個教學重點，一是認識及掌握割圓術，二是推導圓面積的公式。引入活動前，先讓學生數方格來找圓形手工紙的面積，使他們體會古人當時無法直接準確測量出圓面積的問題，繼而帶出劉徽的割圓術，並利用圓形手工紙進行割圓術。為方便操作，學生會改由圓內接正四邊形作開始，先把手工紙對摺兩次來分成四等分，並將摺痕與圓周相交的地方連接成正四邊形（見表 2）。接着以同樣方法，學生增加對摺手工紙的次數來分成八等分和十六等分，並畫出正八邊形和正十六邊形。藉此學生能觀察到隨着圓形手工紙分割成越細小的扇形時，正多邊形的面積越接近圓面積，繼而引導學生明白最後當圓形分割成無限個扇形時，正無限多邊形面積與圓面積相等，這正是割圓術的概念。

表 2 運用圓形手工紙製作正多邊形

| 正多邊形  | 製作步驟（虛線表示摺痕）                                                                        |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 正四邊形  |    |
| 正八邊形  |   |
| 正十六邊形 |  |

為推導圓面積公式作鋪墊，着學生沿摺痕剪出扇形後重排成近似的平行四邊形。通過觀察，學生可知分割出來的扇形越來越近似為三角形，它的弧亦會越接近正多邊形的邊，趨向直線。因此，重排後的圖形越來越像平行四邊形（見圖 6），甚至趨向長方形，再引導學生透過平行四邊形或長方形的面積公式推論圓面積公式（見圖 7）。

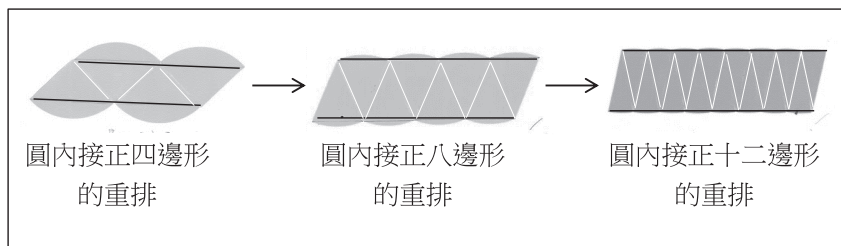


圖 6 學生重排組成的圖形

|                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>由平行四邊形面積公式推論：</p> $\begin{aligned} &\text{底} \times \text{高} \\ &= \pi r \times r \quad \checkmark \\ &= \pi r^2 \quad \checkmark \end{aligned}$ | <p>由長方形面積公式推論：</p> $\begin{aligned} &\text{長} \times \text{闊} \\ &\pi r \times r \quad \checkmark \\ &= \pi r^2 \quad \checkmark \end{aligned}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

圖 7 學生推論圓形的面積公式

是次教學活動的學生表現理想，他們能操作割圓術推導出圓面積公式  $\pi r \times r$ ，與劉徽的半周半徑相乘一樣。本人亦從觀察和學生的提問了解他們的學習難點。如在課堂引入時與學生討論嘗試找出圓面積的方法，部分學生會因循過往學習的長方形或平行四邊形的面積公式，誤把圓周和直徑比擬成圓的底和高，猜想圓面積亦可藉「圓周乘以直徑」或「直徑乘以直徑」計算出來。此外在活動過程中，大多學生的難點是難以想像出圓形如何被分割成無限個扇形，經重排形成長方形的過程。對此，建議運用 GeoGebra 配合，把圓形分割成更多扇形及重排的過程視像化呈現給學生（見圖 8、9），使他們更透徹了解割圓術的概念，且避免繁複的實物操作過程（柯志明，2011）。



以下是運用 GeoGebra 展示圓內接正二十邊形的割圓術流程，把圓形分割成 20 等分，再重排成長方形：

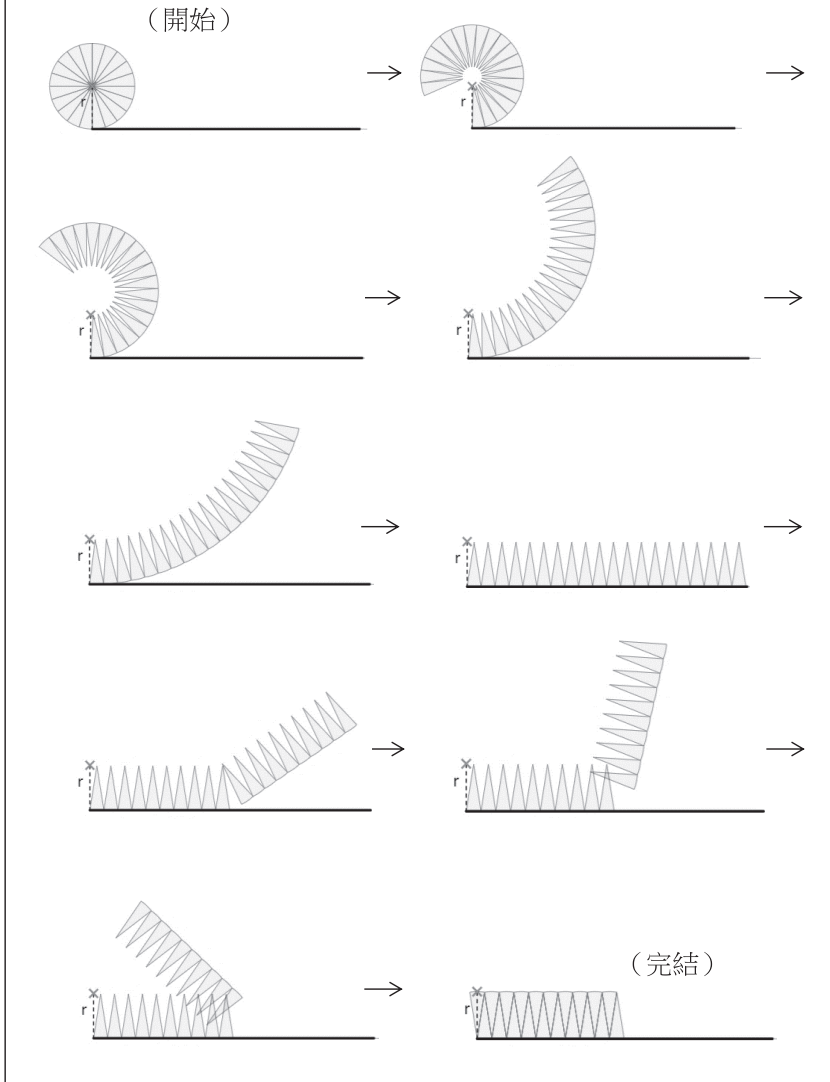


圖 8 圓內接正二十邊形的割圓術  
(擷錄自 [geogebra.org/m/RKDkdDru](http://geogebra.org/m/RKDkdDru))

運用 GeoGebra 更可展示圓內接正二百邊形的割圓術流程，以下是把圓形分割成 200 等分，再重排成長方形：

(開始)

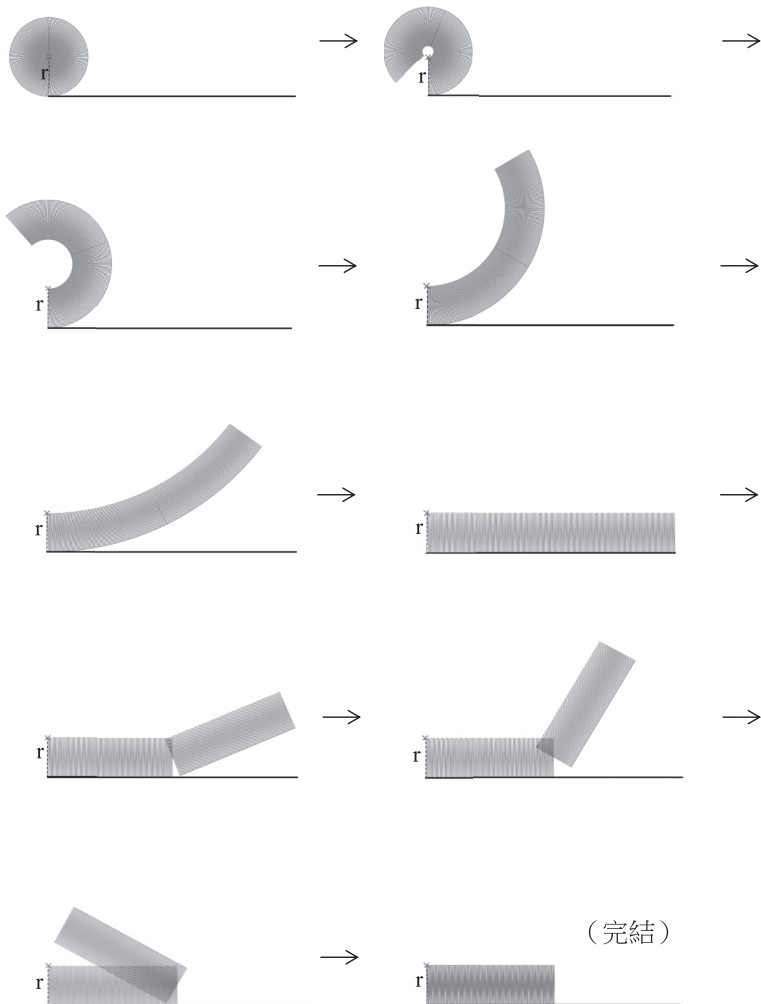


圖 9 圓內接正二百邊形的割圓術  
(擷錄自 [geogebra.org/m/RKDkdDru](http://geogebra.org/m/RKDkdDru))

## 結論

蕭文強(1992)認為「數學歷史就是數學本身」。有賴數學家一直堅持不懈，由起初用量度來找圓面積，到發現與實際的圓面積出現誤差而不再滿足於量度的方法，嘗試運用已有的幾何知識去推證圓面積公式，甚或以微積分計算圓面積公式，才有今天廣為人知的  $\pi r^2$ ，這成果得來不易。透過是次教學活動，學生經歷了數學家尋求圓面積時的困難及如何克服的過程，建構公式背後的數學概念，真正體會到數學家對數學發展的貢獻。故此，除了多與學生分享數學歷史的故事，老師亦可因循數學歷史的演變和發展來設計教學活動，讓學生親身經歷數學歷史的變遷，提高他們學習數學的趣味和成功感，並培養他們的數學素養。

## 參考文獻

- 張琇如(2007)。π 點滴。載翰林高中數學領域(主編)。《96 學年度跨縣市工作坊優良作品彙編》(頁 61 - 69)。台灣：翰林出版。
- 蔡聰明(1996)。圓與  $\pi$ 。《科學月刊》，27(6)，頁 12 - 15。
- 教育局(2017)。《數學教育學習領域課程指引補充文件：小學數學科學習內容(2017)》。香港：教育局。
- 洪萬生(1978)。割圓術始末。《數學傳播》，3(2)，頁 44 - 52。
- 柯志明(2011)。GeoGebra 探究圓面積公式——一次無心插柳的「數學化」教學設計。《數學教育》，31，頁 36 - 46。
- 蘇俊鴻(1999)。兩個證明的比較。《HPM 通訊》，2(12)，頁 8 - 10。
- 蕭文強(1992)。數學史和數學教育：個人的經驗和看法。《數學傳播》，16(3)，頁 23 - 29。

作者電郵：kychung@hokshan.edu.hk

附件一：活動工作紙舉隅兩篇

年級：六年級 (A) 班

東華三院鶴山學校

姓名：\_\_\_\_\_

數學科 活動工作紙

日期：\_\_\_\_\_

圓的面積

成績：

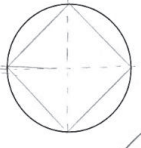
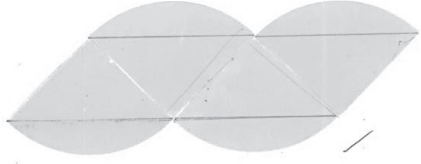
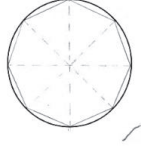
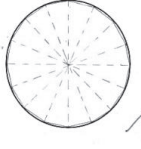


39/41



運用圓形手工紙進行以下活動，找出圓形的面積公式。

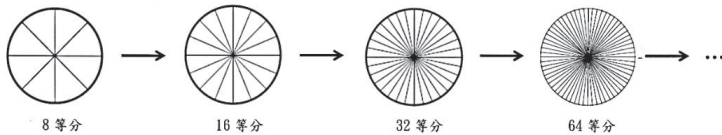
1. 把圓形手工紙對摺等分成不同的扇形。
2. 把摺痕與圓周相交的地方用直線連接起來，形成正多邊形。
3. 沿摺痕剪出各個扇形，再嘗試重排成其他已認識的圖形。
4. 觀察及記錄結果於下表內。

| 對摺後的圓形                                                                                                                                             | 重排後的圖形                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a)</p>  <p>整個圓形分成 <u>4</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>四</u> 邊形。</p>     |  <p>重排後的圖形像一個 <u>平行四邊</u> 形。</p>   |
| <p>b)</p>  <p>整個圓形分成 <u>8</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>八</u> 邊形。</p>    |  <p>重排後的圖形像一個 <u>平行四邊</u> 形。</p>  |
| <p>c)</p>  <p>整個圓形分成 <u>16</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>十六</u> 邊形。</p> |  <p>重排後的圖形像一個 <u>平行四邊</u> 形。</p> |

結論：

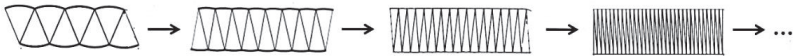
1. 隨着圓形手工紙分割越來越多時，正多邊形的面積越接近圓形的面積，直到最後正多邊形的面積

與圓形的面積相同，我們可透過正多邊形的面積來得出圓形的面積。



2. 同時，分割出來的扇形亦會越像三角形。當這些近似三角形的扇形越小，它的底邊越接近為直線，

重排後組成平行四邊形。



3. 藉平行四邊形的面積公式底×高來推論圓形的面積公式，當中底 =  $\pi r$  及  
高 =  $r$ 。

$$\begin{aligned} & \text{底} \times \text{高} \\ &= \pi r \times r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

由此，我們可知圓形的面積公式是  $\pi r^2$ 。

年級：六年級 (A) 班

東華三院鵝山學校

姓名：\_\_\_\_\_

數學科 活動工作紙

日期：\_\_\_\_\_

圓的面積

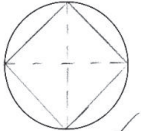
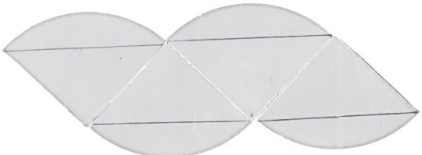
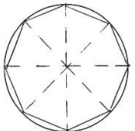
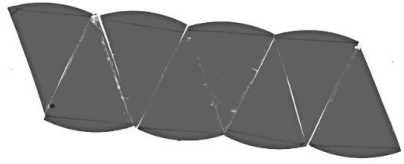
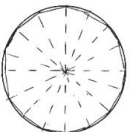
成績：



3/4

運用圓形手工紙進行以下活動，找出圓形的面積公式。

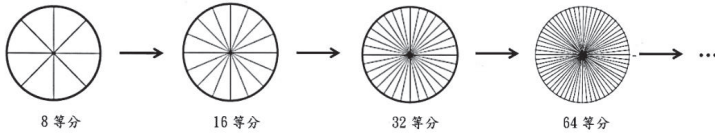
1. 把圓形手工紙對摺等分成不同的扇形。
2. 把摺痕與圓周相交的地方用直線連接起來，形成正多邊形。
3. 沿摺痕剪出各個扇形，再嘗試重排成其他已認識的圖形。
4. 觀察及記錄結果於下表內。

| 對摺後的圓形                                                                                                                                             | 重排後的圖形                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a)</p>  <p>整個圓形分成 <u>4</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>4</u> 邊形。</p>     |  <p>重排後的圖形像一個 <u>平行四邊</u> 形。</p> |
| <p>b)</p>  <p>整個圓形分成 <u>8</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>8</u> 邊形。</p>     |  <p>重排後的圖形像一個 <u>平行四邊</u> 形。</p> |
| <p>c)</p>  <p>整個圓形分成 <u>16</u> 個扇形，<br/>並可畫出正 <u>16</u> 邊形。</p> |  <p>重排後的圖形像一個 <u>長方</u> 形。</p> |

結論：

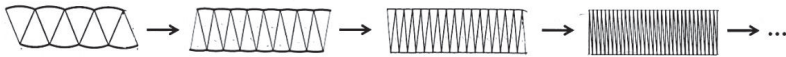
1. 隨着圓形手工紙分割越來越多時，正多邊形的面積越接近圓形的面積，直到最後正多邊形的面積

與圓形的面積相同，我們可透過正多邊形的面積來得出圓形的面積。



2. 同時，分割出來的扇形亦會越像三角形。當這些近似三角形的扇形越小，它的底邊越接近為直線，

重排後組成長方形。



3. 藉長方形的面積公式長 × 闊來推論圓形的面積公式，當中長 =  $(\pi r)$ ，闊 = 半徑。

$$\begin{aligned} & \text{長} \times \text{闊} \\ &= \pi r \times r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

由此，我們可知圓形的面積公式是  $\pi r^2$  /  $\pi \times \text{半徑} \times \text{半徑}$