對課程引入「三垂線定理」的見解

梁子傑
循道中學

引言

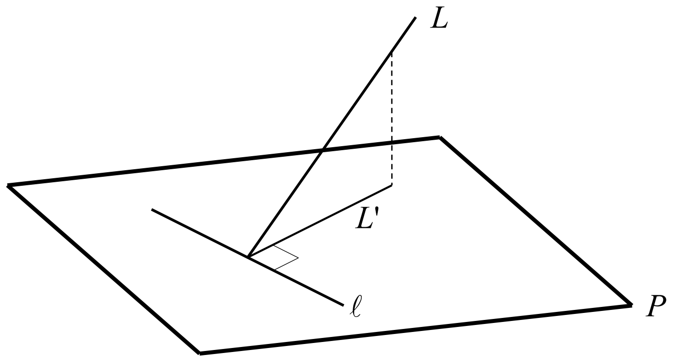
相信對於很多數學教師朋友來說，他們應該是從教育局於 2017 年初所發表的課程諮詢文件中才第一次認識「三垂線定理」這個名稱。雖然這定理在立體幾何學中可以算是一個相當基本和基礎的定理，但是它從未在香港的數學課程中出現過，而我本人卻非常反對將這個定理引入新的數學課程之中。事實上，當那份課程文件仍處於諮詢階段的時候，本人於同年 4 月 21 日，寫了一封信給當時教育局課程發展處數學教育組的總課程發展主任，向他闡述我反對引入三垂線定理（與及反對另外一些課程改動）的理由。可惜的是，經過了多月的等待，仍然得不到對方任何的回覆。而在隨後的 7 月和 12 月，當局已經在其網頁中公布了正式的課程文件，並「建議」於 2023/24 學年起，逐年在高中實行，當中當然包括了我反對的三垂線定理。

或許我當年的信件寫得不夠清晰，無法令相關的官員明白我的想法，故此在此借用《數學教育》的部分篇幅，將本人反對引入三垂線定理的見解寫給大家評評（包括探討當局引入該定理的原因、該定理的證明與目前課程的配合和引入這定理會為教學和考試帶來的影響），並求獲得拋磚引玉之效，望有識之士能夠不吝賜教，以消除本人對引入此課題的疑慮。

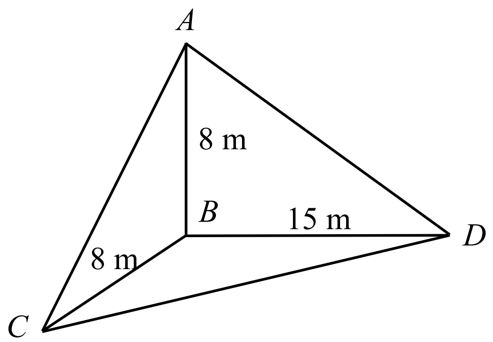
三垂線定理與文憑考試

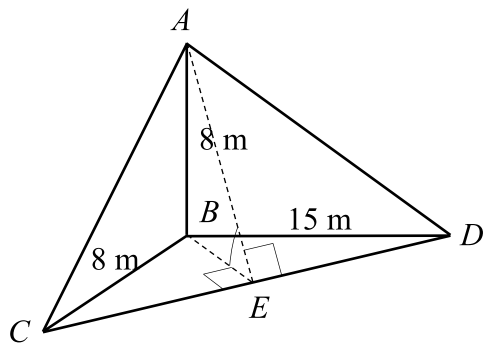
根據局方在 2017 年 12 月更新的《數學課程及評估指引（中四至中六）》，三垂線定理收錄於學習單位 14「續三角學」之中，其學習重點為：「14.8 理解三垂線定理」，當中並沒有附加任何的注釋，解釋究竟要求學生對此重點要「理解」到怎樣的程度。

我們不難從網頁或一些談及立體幾何的書籍中知道，所謂的「三垂線定理」，它的內容如下：「假設 L 為平面 P 以外的一條直線，ℓ 為平面上的一條直線。如果 L' 為直線 L 在 P 上的（垂直）投影並且垂直於 ℓ，那麼 L 亦垂直於 ℓ。」



三垂線定理的一個重要應用，是用來計算兩平面之間的夾角。一個最典型的例子，就是 2014 年香港中學文憑考試數學科卷二的第 40 題：「如圖，AB 垂直於平面 BCD，並設 $\angle CBD = 90°$。若平面 ACD 與平面 BCD 之間的夾角為 θ，求 $\tan\theta$。」





根據兩平面之間夾角的定義，平面 ACD 與平面 BCD 之間的夾角是這樣構作的：首先我們要在兩平面相交的稜 CD 上取一點 E，然後在每一平面上各自畫一條通過 E 並且垂直於 CD 的直線。由這兩條直線所形成的角，就是題目所要求的夾角 θ 了。但是，在 CD 上隨意取一點 E 是不易計算的，而最實際可行的方法，就是從兩三角形頂點 A 和 B 各自構作一條垂線往底邊 CD，使它們交底邊於 E，從而得出夾角為 $\angle AEB$。問題是：從兩三角形頂點各自構作的兩條垂線，它們真的交 CD 於同一點嗎？

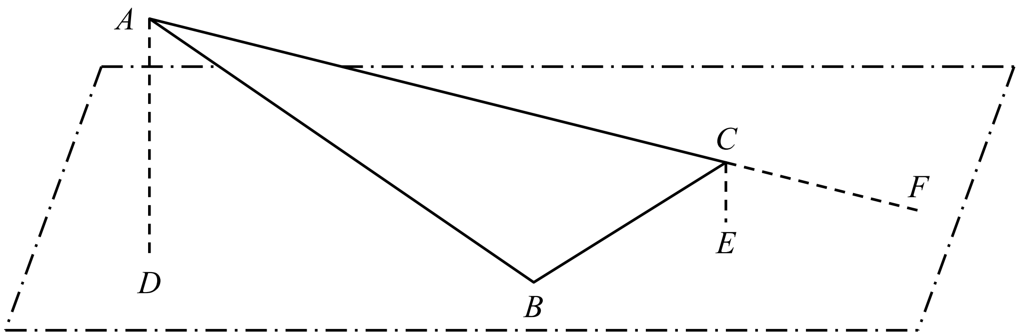
事實上，根據定義，由於 AB 垂直於平面 BCD，因此 BE 是 AE 向平面 BCD 的投影。如果 BE 垂直於 CD，那麼從三垂線定理可知，AE 也垂直於 CD。換言之，$\angle AEB$ 可以理解為平面 ACD 與平面 BCD 之間的夾角 θ。

具體地確定了 θ 在圖中的位置之後，相信 $\tan\theta$ 的值亦不難推算，這裏就不再細表了。

可能細心的讀者都會發現，三垂線定理首次出現於教育局在 2017 年初所發表的課程諮詢文件中，在之前的課程文件中並沒有出現，那麼為何在 2014 年的公開考試試卷中會出現應用三垂線定理的題目呢？

由於我本人並非在香港考試及評核局裏面工作，又由於上述題目屬於卷二的題目，考評局發售的「考試報告」亦只簡單地提供該題的答案，並沒有附上任何解答步驟，因此本人無法知悉除了應用三垂線定理之外，有沒有其他屬於課程範圍以內解答這題目的方法。如果有，那麼這題當然沒有超越考試範圍；如果沒有，那麼這題就是超越了考試範圍了！

不過，2017 年香港中學文憑考試數學科卷一第 19 題 (b) 的第 iii 分題超越考試範圍的情況就更明顯了。經過一番計算之後，題目要求考生計算圖中斜面 ABC 與水平面之間的傾角。



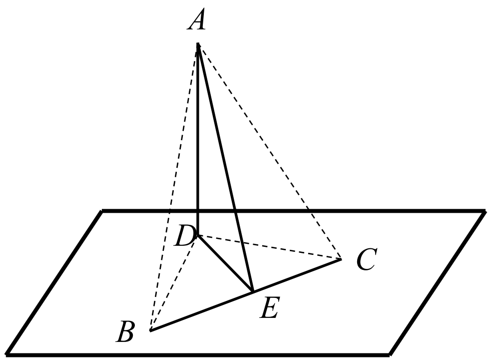
根據「評卷參考」，解答這題的其中兩個步驟是：一、「設 P 為由 A 向 FB 延線的垂足」；二、「由於 DP 垂直於 FB 的延線，因此平面 ABC 的傾角是 $\angle APD$。」仔細看看第二步，雖然「評卷參考」中沒有明確地指出，但是顯然「DP 垂直於 FB 的延線」這結論必定來自三垂線定理（其實是它的逆定理，下面續有討論）！原來 2017 年發表了諮詢文件之後，仍未有諮詢結果之前，考評局已經將三垂線定理納入為文憑試的範圍了！

正如前面提及，教育局於 2017 年 12 月，已經更新了在網上的《數學課程及評估指引》，雖然在該指引的連結下面清楚地列明：「課程發展議會建議高中數學科必修部分修訂課程於 2023/24 學年起在中四逐年推行」，但事實就是更新文件中新添的學習重點 14.8 早已在考試中應用了！

本人質疑：教育局和考試及評核局用如此的手法來將一個超越了原本考試範圍的題目合理化和合法化，是否有違程序公義？

三垂線定理的證明

一般來說，三垂線定理一共有兩個證明。第一個證明涉及圖形的對稱原理。首先，如下圖，BC 是平面上一直線，E 是 BC 上一點，A 是平面以外的一點，D 是 A 向平面的垂足。現假設 $DE \perp BC$，要證明 $AE \perp BC$。



不失一般性，我們設 E 為 BC 的中點。由於 DE 左右兩邊的三角形全等（S.A.S.），因此 $DB = DC$。又由於 AD 垂直於平面 DBC，因此 $\angle ADB = \angle ADC = 90°$。繼而得 $\Delta ABD \cong \Delta ACD$（S.A.S.），即 ΔABC 為一等腰三角形。最後，由於 $BE = CE$，因此由等腰三角形的對稱性質（或者證明 $\Delta AEB \cong \Delta AEC$）得知，$AE \perp BC$。證完。

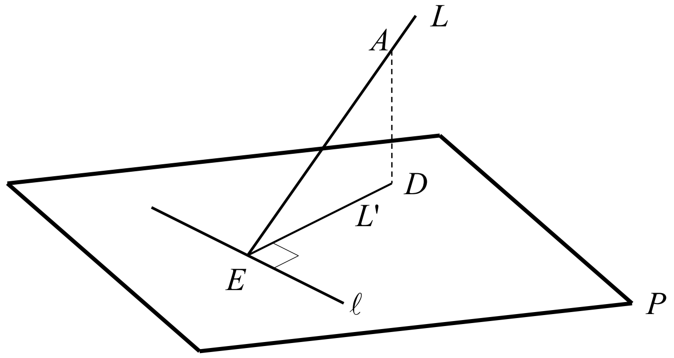
這個證明利用了圖形的對稱性（尤其是等腰三角形的對稱性），本來很簡單直接。但不知大家有沒有留意到，在新修訂的課程文件中，等腰三角形的對稱性質刻意被淡化了，對將來的學生來說，這個證明可能行不通！

從教育局的網頁，我們同樣可以下載關於初中數學科的課程指引。初中的學習重點 21.3 是「理解等腰三角形的性質」，其後有兩個注釋：一、「性質指等腰三角形底角相等」；二、「教師可讓學生認識由 SAS 證明等腰三角

形底角相等」。

我對這兩個注釋感到非常困惑和困擾。首先，當我們寫幾何證明的時候，如果我們指出等腰三角形底角相等，那麼傳統上或習慣上，我們會以「等腰三角形底角（base ∠s of isos. Δ）」來說明我們所引述的幾何性質。如果我們利用等腰三角形中間那條對稱軸得出該對稱軸平分頂角或垂直於底邊時，我會用「等腰三角形性質（prop. of isos. Δ）」來說明。但今次課程文件不單含糊了這兩個稱謂，而且只提及底角而不提對稱。它這樣表述，似乎在暗示，從今以後我們毋須向學生說明等腰三角形的對稱性。本來，如果大家認為課程內容太多，容易引起誤會，為了減省學生的壓力，刪去對稱的部分，也無可厚非。不過，如果將高中和初中兩個課程連結在一起比較，那豈不是出現了一個很矛盾的現象？一方面我們毋須教授二維等腰三角形的對稱性質，但另一方面卻要學生認識三維中關於三垂線的對稱性！

三垂線定理的第二個證明利用了一個很基本的立體幾何知識。



假設 A 為直線 L 上一點，D 為 A 向平面 P 的投影，L、L'、ℓ 三線交於 E。由於 AD 垂直於平面 P，因此它必定垂直於平面上所有直線，其中必定包括 ℓ，即 $AD \perp \ell$。又由於我們假設 $ED \perp \ell$，因此 ℓ 垂直於平面 ADE。同理，$\ell \perp L$。證完。

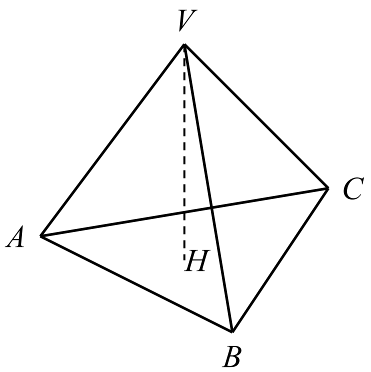
這個證明雖然簡潔，但卻較抽象。整個證明主要應用了直線與平面垂直的定理和定義，即：「若直線垂直於平面上任何兩條直線，則該直線垂直於平面上所有的直線。」由此定義：「若已知直線垂直於平面上的兩條直線，則定義直線垂直於該平面。」

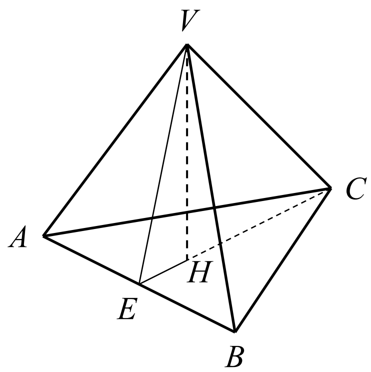
回看教育局新修訂的課程文件，高中學習重點 14.7 是「理解一線與一平面的相交角和兩平面的相交角」。學習重點 14.9 的注釋說：「三維空間的應用題包括求兩直線的交角、直線與平面的交角、兩平面的交角、點與點的距離、點與線的距離和點與面的距離。」乍看之下，這個表述可以說是包羅萬有的了。事實上前面提及的定理和定義也應該包含其中（否則我們無法定義點與線或點與面的距離等概念），但文件始終沒有明確地指出學生須認識直線與平面垂直的定理和定義，也無法知道學生須對有關定理和定義有多深入的認識。在這前題下，上面的第二證明，又是否適合在課堂中介紹呢？而在公開考試中，又是否假設考生對此證明有所認識呢？

分析過上述對兩個證明之後，我不禁提出一個疑問：究竟學生對三垂線定理的「理解」應該有多深入呢？如果我們要求學生寫出三垂線定理的證明，那麼以目前課程文件的安排，卻未有足夠的概念基礎去做到。如果我們只要求學生知道有這個定理而毋須證明，那麼這又是否違反數學教育的意義和目的？

三垂線定理的應用

三垂線定理的應用並非如 2014 年文憑試那道選擇題那麼簡單，它其實可以用來證明一些非常精妙的定理。例如：下圖中，*ABC* 是平面上的一個三角形，*V* 是平面以外一點使得 *VA*、*VB* 和 *VC* 互相垂直。*H* 是 *V* 向平面 *ABC* 的垂足。這裏，我可以證明：*H* 是 ΔABC 的垂心。



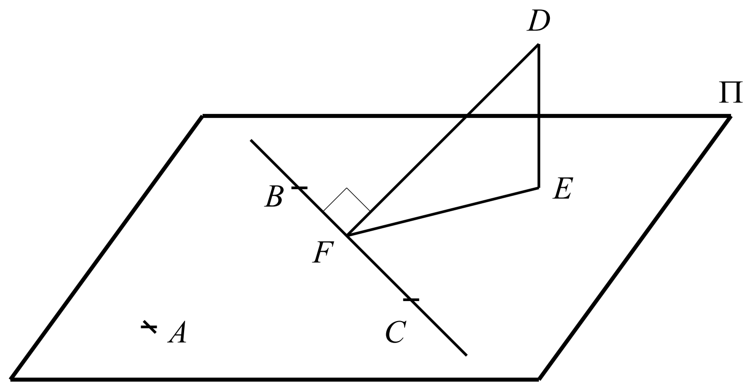


設 *E* 為從 *H* 向 *AB* 的垂足。由三垂線定理可知 *VE* 垂直於 *AB*。由於 *CV* 垂直於 *VA* 和 *VB*，因此 *CV* 垂直於平面 *VAB*。以 *VAB* 為底，再應用三垂線定理，得 *CE* 亦垂直於 *AB*。由垂直線的唯一性可知，*C*、*H*、*E* 三點共線。換言之，由 *C* 向 *AB* 的垂線通過 *H*。

類似地可以證明：由 B 向 AC 的垂線及由 A 向 BC 的垂線，它們都通過 H。由此可知，H 是三條垂線的交點，即它是 ΔABC 的垂心。證完。

回看新修訂的課程文件，三垂線定理被納入學習單位「續三角學」之中。但無論是三垂線定理本身的證明，或者是一些關於三垂線定理的應用題，它們都是純粹立體幾何的內容，與三角學沒有直接關係。這安排是否很奇怪？事實上，三垂線定理是立體幾何中的一個重要定理，由它們可以引發很多立體幾何的結果。按照課程編排，這些應用題又是否包括入課程範圍之中？由此我不禁要問：究竟三垂線定理在課程裏面的定位是甚麼？究竟「理解三垂線定理」要到怎樣的程度？可惜課程文件學習重點 14.8 並沒有附上任何的注釋，無法解答這一連串的疑問。

2018 年香港中學文憑考試數學科延伸單元二第 12 題，它以向量形式給定了 A、B、C 和 D 四點的位置，又以 A、B、C 三點確定了平面 Π。E 為 D 向平面 Π 的投影。(a) 部分已經計算出向量 $\overrightarrow{DE}$ 的值。(b) 部分開始的時候定義 F 為 BC 上一點，並且 DF 垂直於 BC。第 (i) 分題要求考生求 $\overrightarrow{DF}$，第 (ii) 分題則要求考生判別 $\overrightarrow{BC}$ 是否垂直於 $\overrightarrow{EF}$。據我估計，第 (ii) 分題的原意是希望考生通過計算 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 的純量積從而得出 $BC \perp EF$ 的結論。不過，問題是：如果我們懂得三垂線定理，那麼第 (ii) 分題就變得十分明顯，根本不用任何計算就已經可以得到 $BC \perp EF$ 的結論！



當然，細心的讀者不難發現，我在這裏使用的並非三垂線定理，而是三垂線定理的逆定理！

三垂線定理的逆定理是這樣的：「假設 L 為平面 P 以外的一條直線，ℓ 為平面上的一條直線。如果 L 垂直於 ℓ，那麼 L 在 P 上的投影 L' 亦垂直於 ℓ。」三垂線定理的逆定理和原定理差不多，而它的證明亦與原定理的證明大同小異（所以我不打算在這裏寫出它的證明，留給讀自行研究）。

相信大家都同意，三垂線定理的逆定理並非「全新」，當中的思路和推理，與原定理分別不大。如果學生能夠接受三垂線定理，那麼再介紹它的逆定理，亦不甚困難。不過，在這裏我想指出的是：由於課程文件寫得含糊，未有為清楚訂明對三垂線定理的學習要求（當中更沒有說明是否包括該逆定理），因此無論是否引入該逆定理，這個內容也會為教學和考試帶來混亂。就以上述 2018 年的試題為例，如果考生簡單地指出該題的設定與三垂線定理逆定理的設定一樣，從而得出 $BC \perp EF$ 的結論，我們是否認為這是可接受的答案呢？

最後，我要提出另一個疑問：由於新修訂的高中數學課程將於 2023/24 學年起在中四逐年推行，因此第一次包括三垂線定理的文憑考試理應在 2026 年才正式舉行，但考評局卻早於 2014 年已經引入了有關的考試題目（並且在 2017 重複考核一次）。由今天到 2023 年，我們身為前線的數學教師，應否在課堂上向學生講解該定理呢？如果答案是否定的，那麼我們應如何向學生講解那些涉及三垂線定理的公開考試試題呢？如果答案是肯定的，那麼當遇上類似 2018 年延伸單元二的題目，我們可否引用三垂線定理或其逆定理來作答呢？同時，我們為今天的學生（即在 2026 年以前應考文憑試的學生）講解一道涉及將來數學課程內容的公開考試題目，是否有點滑稽？

如此混亂的考試安排和課程修訂，恐非我們師生所樂意看見的！還望當局三思，作出英明決定，臨崖勒馬，盡快澄清，撥亂反正。

作者電郵：jckleung@netvigator.com