豈止「破鏡重圓」

黃志華

$$45^2 = 2025,\ 20 + 25 = 45$$
$$55^2 = 3025,\ 30 + 25 = 55$$

這些饒具趣味的自然數式子，許多趣味數學書都有提及(如《數學和數學家的故事》第三集 p.43，《趣味數學辭典》(上海辭書出版社) p.8-10)。而像45、55 這種奇妙的自然數，筆者個人喜歡稱作「破鏡重圓數」，然而多年來，人們對它的認識似乎就止於「二次重圓」，但其實這種數學奇妙絕不止此，譬如：

$$45^2 = 2025,$$
$$20 + 25 = 45$$

$$45^3 = 91125$$
$$9 + 11 + 25 = 45$$

$$45^4 = 4100625$$
$$4 + 10 + 06 + 25 = 45$$

$$45^5 = 184528125$$
$$1 + 84 + 52 + 81 + 25 = 243$$
$$2 + 43 = 45$$

$$45^6 = 8303765625$$
$$83 + 03 + 76 + 56 + 25 = 243$$
$$2 + 43 = 45$$

$$45^7 = 373669453125$$
$$37 + 36 + 69 + 45 + 31 + 25 = 243$$
$$2 + 43 = 45$$

... ...

以上還可以一直寫到無窮次方，「重圓」性質始終不變，而 55 這個數自然也具有這種「無窮次重圓」的性質。

上面這個多年不見有人發現的奇觀，或說明一點，我們都很易走到真理面前而錯過了它。

要用數學方法說明這奇觀的必然性，涉及數論的同餘式理論，爲免太花篇幅，這裡只作簡單說明：

定理：若自然數 P 是下述聯立同餘式的最小解：

$$\begin{cases} P \equiv 0 & (mod\ \alpha) \\ P \equiv 1 & (mod\ \beta) \end{cases} \text{-----}(1)$$

其中 α 和 β 互素，$\alpha\beta = 10^n - 1$，$n \geq 1$，則 P 可無窮次重圓。

證明這個定理的關鍵是 $1^x \equiv 1 \pmod y$
對於任何正整數 x 和 y 都成立。

此外，若 $P = 10^n - 1$，其中 $n \geq 1$，則 P 也是可以無窮次重圓的。
筆者也發現一種只在奇數次方時「重圓」的自然數，如：

$44^2 = 1936$
$19 + 36 = 55$
$44^3 = 85184$
$8 + 51 + 84 = 143$
$1 + 43 = 44$
$44^4 = 3748096$
$3 + 74 + 80 + 96 = 253$
$2 + 53 = 55$
$44^5 = 164916224$
$1 + 64 + 91 + 62 + 24 = 242$
$2 + 42 = 44$
... ...

設這種只在奇數次方時「重圓」的自然數爲 Q，則 Q 要麼是 $10^n - 2$（其中 $n \geq 1$），要麼必是下列聯立同餘式的最小解：

$$\begin{cases} Q \equiv 0 & (mod\ \alpha) \\ Q \equiv -1 & (mod\ \beta) \end{cases} \text{----}(2)$$

其中 α 和 β 互素，$\alpha\beta = 10^n - 1$，$n \geq 1$，有趣的是，若 P 是無窮次重圓數，則（$P - 1$）總是只在奇數次方時重圓。

在池野信一、高木茂男、土橋創作、中村義作合著的《數理 Puzzles》中，曾把「二次重圓數」寫成如下的形式：

$$2045 = 20 + 45^2$$
$$3055 = 30 + 55^2$$
$$88297 = 88 + 297^2$$
$$494703 = 494 + 703^2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

這是對「重圓數」的「純度」要求提高了。因爲像

$$45^5 = 184528125$$
$$1 + 84 + 52 + 81 + 25 = 243$$
$$2 + 43 = 45$$

這種例子，就明顯不能改寫成上述形式。於是新的問題又來了，有多少三次或四次(五次或以上的又有沒有？)「重圓數」有「純度」，能寫成上述形式？下面略舉一些筆者發現的實例：

$$518 = 5 + 1 + 8^3$$
$$26198297 = 26 + 198 + 297^3$$
$$12519492322 = 125 + 1949 + 2322^3$$
$$20301732728 = 203 + 0173 + 2728^3$$
$$4100645 = 4 + 10 + 06 + 45^4$$
$$9150655 = 9 + 15 + 06 + 55^4$$
$$35152125433 = 35 + 152 + 125 + 433^4$$

作爲課外的學習材料，我相信這種「無窮次重圓數」可以又一次讓學生認識到自然數的美妙及不可思議之處，並因而拓展了想像力。事實上，在一般趣味數學書中，找「二次重圓數」往往是用代數方法，可是再高次一些的「重圓數」，若沿用代數方法去尋找，就會顯得很笨拙，這亦使學生認識到掌握不同的數學工具重要性。