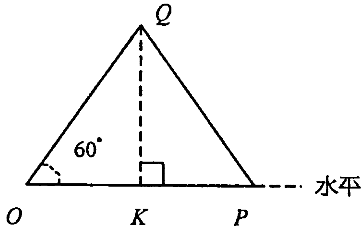
在釘板上可以圍出等邊三角形嗎？

馮振業 香港教育學院

釘板是小學數學課常用的教具之一。在教授三角形的一些特類時，教師都喜歡用釘板，著學生以橡皮圈在釘板上圍出各種大小不同的直角三角形、等腰三角形和不規則三角形。然而，經常有教師問：可否在釘板上圍一個等邊三角形？有些教師則直觀地認定不可能。這裏給大家一個答案：不可能！以反證法證明如下：

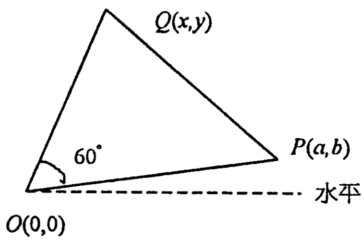
假設可圍出等邊三角形，則下列兩情況之一必然出現：

<u>情況一</u>：其中一邊在水平或鉛垂線上
則必成以下位置〔有需要時把釘板旋轉 90°〕：



由於 O、P、Q、K 全為格點〔lattice points〕，QK 和 OK 的長度皆有整數格數，致使 $\frac{QK}{OK}$ 為有理數，與 $\tan \angle QOK = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$ 不符，故這類位置不可能。

<u>情況二</u>：無任何一邊置於水平或鉛垂線上
在加上坐標後，必成以下位置：



由於 OP 及 OQ 皆不在鉛垂線上，$a \neq 0$ 及 $\frac{b}{a} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$。

$$OQ\text{ 的斜率} = \frac{\tan 60^\circ + \frac{b}{a}}{1 - \tan 60^\circ \cdot \frac{b}{a}} = \frac{a\sqrt{3}+b}{a-b\sqrt{3}},$$

OQ 的方程為 $(a-b\sqrt{3})y = (a\sqrt{3}+b)x$，$OP$ 的垂直平分線的方程為 $x^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2$，即

$$2ax+2by=a^2+b^2 \text{。}$$

既然 Q 是直線 OQ 及 OP 的垂直平分線的交點，解下列方程組

$$\begin{cases}(a-b\sqrt{3})y=(a\sqrt{3}+b)x\\ 2ax+2by=a^2+b^2\end{cases}$$

即得 Q 的坐標 $\begin{cases}x=\dfrac{a-b\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{a\sqrt{3}+b}{2}\end{cases}$。

因 P 是格點，a、b 皆為整數，加上 $a \neq 0$，y 必為無理數，即 $Q(x,y)$ 並非格點，故這類位置亦不可能。

綜合上述情況，知不可能圍得等邊三角形。

編者按：有興趣釘板在課堂上的運用者可參閱

Bradford, J. (1987). *Geoboard Teachers' Manual* . Fort Collins, Colo: Scott Resources.

Kelvin, J. (1993). *The Circular Geoboard*. San Leandro, Calif. : Teaching Resource Centre.

McElduff, R. (1992). *Geoboards*. White Planis, NY: Cuisenaine Company of America.

Mok, I. (1992). Sharing of teaching ideas : An extension of the use of geoboard in Form One. *School Mathematics Newsletter*, 11, 3-10.