中國數學史中的正負數及其運算法則[1]

傅海倫
山東師範大學數學科學學院，山東濟南
陳偉
山東省曹縣常樂集鄉中學

在中小學數學教學、培訓以及研修學習中，不少教師都提到中國數學史的正負數的問題，筆者在這裏給出一些數學史料，使大家有一個更清楚更準確的認識。同時，也提出一點自己的認識和理解，希望與同行作這方面的交流，也權當對數學史學習與應用的一點體會。

一、關於中國數學史中的正負數

中國是世界上最早引入負數並給出正負數運算法則的國家。可是究竟應當怎樣認識正負數，卻需要搞清楚。事實上，在我國最早的數學經典——《九章算術》中“方程”章已用到正負術。《九章算術》確定了中國古代數學的框架、內容、形式、風格和思想方法的特點。全書共分九章，有 90 餘條抽象性算法、公式，246 道例題及其解法，基本上採取算法統率應用題的形式，包括豐富的算術、代數和幾何內容。《九章算術》是以計算爲中心以解決實際問題爲目的的算法體系，在結構上總體可分爲：“問”、“答”、“術”。如果幾個相連的題的解法完全相同，就把“術”放在這一類題目的最後一題解答之後，作爲一般性的算法。因此，《九章算術》並不是所謂的“問題集”，而是注重計算的方法和過程，以“術”文統率應用問題的算法體系。這一點非常重要，是理解包括正負術在內的我國傳統數學構造性與機械化思想特點的基礎和前提。

在解“方程”進行消元過程中，要進行兩行間的對減相消，不可避免地會出現“以少減多”（注意不是“以多減少”）不夠減的情形，要保證

[1] 課題項目：山東省高校人文社科研究計劃課題“數學文化及其在數學教育中的應用研究”（編號 J11WH11）和山東省研究生創新計劃項目——教育碩士（數學）專業學位課程創新體系構建與實踐教學探索（SDYY12121）、教育碩士示範課程“中小學數學課堂教學設計與案例分析”。

這種機械化的算法暢通無阻，就必須引進負數和建立正負數的運算法則，然後根據法則計算出結果。

“方程”章第 1 問：

今有上禾三秉、中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉、中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉、中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

“方程術”，可以分爲 10 個程序步驟：

①置上禾三秉、中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗於右方。中、左禾列如右方。
②以右行上禾遍乘中行而以直除。
③又乘其次，亦以直除。
④然以中行中禾不盡者遍乘左行，而以直除。
⑤左方下禾不盡者，上爲法，下爲實。實即下禾之實。
⑥求中禾，以法乘中行下實。而除下禾之實。
⑦餘，如中禾秉數而一，即中禾之實。
⑧求上禾，亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。
⑨餘，如上禾秉數而一，即上禾之實。
⑩實皆如法，各得一鬥。

程序（1）即按分離系數法將前後三次試驗所得的十二個數據布列成右、中、左三行排列成現代矩陣形式如下（圖 3－7）：

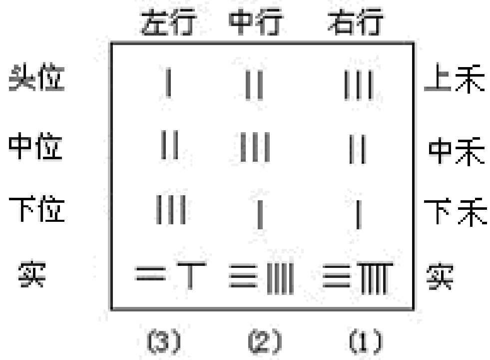

图3－7

本例實際是相當於現代解下面的線性方程組：

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, & (1) \\ 2x + 3y + z = 34, & (2) \\ x + 2y + 3z = 26, & (3) \end{cases}$$

由於“方程”模型及其解之特殊構造性，決定了可以對它施行種種行的消元變換的過程，因而構造性就與算法的機械化特色聯繫在一起。“方程術”程序步驟②～⑩深刻體現了中國傳統數學的這兩個方面的特點。從現代觀點來說，“方程”的演算程序類似於矩陣的“初等變換”算法，即相當於利用線性方程組的係數增廣矩陣進行初等變換來求解。《九章算術》首先採取在算板上布列“方程”，然後反復對“方程”施行基本的運算即“遍乘”，“直除”的行變換。這裏的“直除”，就是作減法運算。這裏就自然需要引進負數的運算法則，而並不在乎負數的意義和概念是什麼。因此，正負術的引入是“方程”算法機械化的結果。這在世界上是非常獨特的。

到了魏晉時期，我國偉大的數學家劉徽在《九章算術註》中給出了正負數的意義和概念，第一次深刻闡述了自己的觀點。劉徽爲《九章算術》“正負術”作註時說：

“今兩算得失相反，要令正負以名之。正算赤，負算黑，否則以邪正爲異”。

正負是什麼意思呢？劉徽註文中說：“今兩算得失相反，要令正負以名之。”“算”當時是指算籌，如果計算時用算籌代表“得”、“失”兩種量，那就要用正負數來定義。這個看法是很正確的，用籌進行代數運算時如何區別正負數，以前不見記載。劉徽提出：“正算赤，負算黑，否則以邪正爲異。”這就是說劉徽用紅、黑兩種顏色的算籌區別正負，否則當用一種顏色的算籌時可以在擺法上以“正”、“邪”(斜)區別正負數。這兩種方法，對後來的數學都有深遠的影響。劉徽還認爲：“言負者未必負於少，言正者未必正於多”。前一句話是指負數的絕對值未必小，後一句話是指正數的絕對值也不定很大，因此這兩句話說的是關於正負數的絕對值。

二、關於正負數的運算法則

劉徽不僅在工具上規定了正負數的區別，而且還規定了正負數的運算法則：

同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之。
異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

前四句是指正負數的減法法則，用現代記號就是：當 $a \geq b > 0$ 時，

$(\pm a) - (\pm b) = \pm(a - b)$ （同名相除），

$(\pm a) - (\mp b) = \pm(a + b)$ （異名相益)。

$0 - (\pm a) = \mp a$ （正無入負之，負無入正之)

“無入”，劉徽註釋爲“爲無對也，無所得減也……”，可見“無入”就是“沒有與之對減的數，即是零。

後四句講的是正負數的加法法則：

（1）如果兩數異號，則其和的絕對值是其絕對值之差，其符號由絕對值較大的數的符號決定：

$(\pm a) + (\mp b) = \pm(a - b)$，這裏 $a \geq b > 0$，

$(a) + (-b) = -(b - a)$，這裏 $b \geq a > 0$。

（2）如果兩數同號，則其和的絕對值是兩數絕對值之和：

$(\pm a) + (\pm b) = \pm(a + b)$

（3）正數沒有與之相加的數，仍得正數，負數沒有與之相加的數，仍得負數：

$0 + (\pm a) = \pm a$ ，這裏 $a > 0$。

現在在中小學數學教育中，經常被拿來作爲正負數及其運算例子的是《九章算術》章的第 8 問：

今有賣牛二、羊五，以買一十三豕，有余錢一千；賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足；賣羊六、豕八，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？

答曰：牛價一千二百，羊價五百，豕價三百。

其解法爲：

術曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三負，余錢數正；次，牛三正，羊九負，豕三正；次，牛五負，羊六正，豕八正，不足錢負。以正負術入之。

這裏所說的意思就是：若每頭牛、羊、豕的價格分別用 x、y、z 表示，則可列出現代如下的方程（組）：

$$\begin{cases} 2x+5y-13z=1000 \\ 3x-9y+3z=0 \\ -5x+6y+8z=-600 \end{cases}$$

在這裏“方程”的各項係數及常數項中都出現了負數，利用正負數的運算法則計算結果是自然的，水到渠成的。

關於正負數的乘除法則，在《九章算術》時代或許會遇到有關正負數的乘除運算，可惜書中並未論及，直到元代朱世傑在《算學啓蒙》(1299) 中才有明確的記載：“同名相乘爲正，異名相乘爲負”，“同名相除所得爲正，異名相除所得爲負”，因此最遲於 13 世紀末，我國對有理數四則運算法則已經全面作了總結。總之，從正負數概念的引入，到正負數加減運算法則的形成的歷史記錄，我國都是遙遙領先。

參考文獻

錢寶琮（1964）。《中國數學史》。北京：科學出版社。

郭書春（1992）。《古代世界數學泰斗劉徽》。濟南：山東科技出版社。

郭書春等（1995）。《成就卓著的中國古代數學》。沈陽：遼寧古籍出版社。

傅海倫（2007）。《中外數學史概論》。北京：科學出版社。

九章算術（1990）。《郭書春匯校》。沈陽：遼寧教育出版社。

李繼閔（1990）。《《九章算術》及其劉徽註研究》。西安：陝西人民教育出版社。

首作者電郵：: f_hailun@163.com