分母有理化：一張工作紙的啟示

張僑平
香港中文大學課程與教學學系
黎潔婷
粉嶺救恩書院

根式是中二的基礎部分內容，在一個課題中，學生會學習根式的性質以及運算，特別相比根式的加、減運算來講，對含有根式的分式進行分母有理化是一個教學難點。教授這一課題時，教師主要關注如何進行分母有理化，而且講授的重心主要介紹一些程序式的有理化步驟，但對於爲何要進行分母有理化？以及在進行有理化時學生出現的問題，往往把握不足。基於課堂教學的現場，透過解讀一張工作紙，本文對上述兩方面進行了一些討論，與各位同工分享。

何謂分母有理化（rationalization）？

在教科書中，對於分母有理化的定義是：「把分母的無理數化成有理數的過程，稱爲分母有理化或有理化（rationalization）。」當然，這裡的無理數主要是根式，如 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 就需要分母有理化，但 $\frac{1}{\pi}$ 卻不需要，也做不了。然而，爲何需要對含有根式的分式進行分母有理化？很多學生對此是一知半解的，甚或完全不明白（誠然，不明白概念亦能識做，並能拿到好的分數）。也有學生知道有理化的目地是方便運算。甚麼是「方便」呢？所謂方便，其實也就是轉化爲從前學過的知識。這就像異分母的分數相加減首先要尋找公分母，再轉化爲分子相加減；有分數係數的一元方程，要先去分母，轉化爲整數係數的方程一樣。事實上，對某一根式進行有理化，從方法上來講，它與化同類根式不同，但二者的目的是一樣的，均是爲了便於該根式和其他根式之間進行相加或相減運算（如 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ ），從而簡化整個數式。

如何進行有理化？

對於根式化簡，或者說分母有理化，學生手頭能用的只有兩個性質：(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$；(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。在課堂工作紙設計上，教師遵循從簡單到複雜的想法，一步步鋪陳，從基礎聯繫題，到鞏固練習題，最後是挑戰題。然而，教學現場卻並非如期所願。

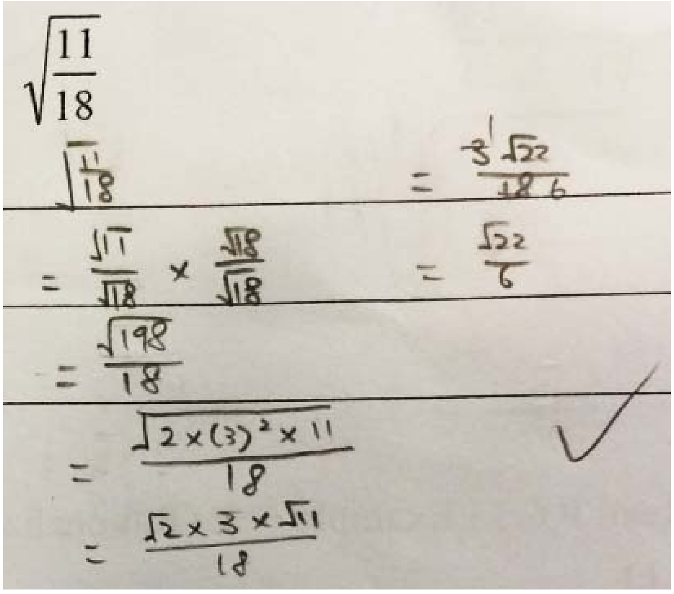
首先是最簡單的一個根號情況，比如：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。進而，再練習一些類似問題，如 $\dfrac{11}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{6}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ 等等。遇到兩個根號或者根號內爲分數的情形，以如 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 或者 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，也照做不誤。不過在處理一些較爲複雜的根式時，學生的解法出現了差異。

比如，解決 $\sqrt{\dfrac{36}{7}}$ 或者 $\sqrt{\dfrac{5}{27}}$ 這類問題。教師期望學生運用根式性質2）先分拆成兩個根號，對其中某一個（或分子或分母）進行約分化簡，再進行有理化。爲達成這一目的，教師精心設計了工作紙：

$$\sqrt{\frac{36}{7}}=\frac{(\quad)}{(\quad)}=\frac{(\quad)}{(\quad)}\times\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}=\underline{\qquad\qquad}.$$

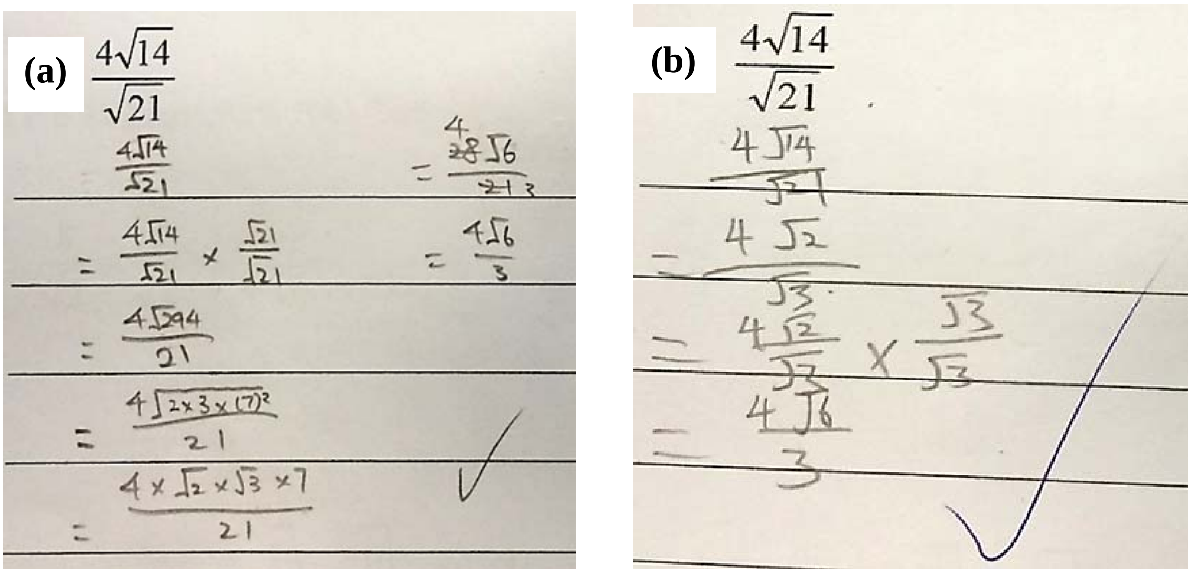
$$\sqrt{\frac{5}{27}}=\frac{(\quad)}{(\quad)}=\frac{(\quad)}{\sqrt{(\ )^2\times(\ )}}=\frac{(\quad)}{(\ )\times\sqrt{(\ )}}=\frac{(\quad)}{(\ )\times\sqrt{(\ )}}\times\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}=\underline{\qquad\qquad}.$$

學生依據限制好的答題框架（這個有其好的一面，也有其局限）塡答，沒有出現太大的問題。不過，真正讓他們放手去做，便出現大量如圖一的情況：



圖一　分母有理化鞏固練題

等到再對更複雜的根式 $\frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{21}}$ 進行有理化時，學生中便出現兩種做法（見解法 1a 和解法 1b）：



圖二　分母有理化挑戰題（解法 1a、解法 1b）

詢問兩位使用解法 1a 的學生時，一個說，這樣做方便，另一個說習慣這樣做。而使用解法 1b 的同學，則認爲解法 1b 方法簡便。在有理化過程中，學生對於「方便」的理解，並非我們常常想的那樣。

對於解法 1a，其實是學生在初次接觸分母有理化時習得的方法。例如，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的有理化方法。而這種方法不斷被教師的例題或教科書上的練習所強化，久而久之，遇到較複雜的有理化問題，學生不自覺的還是沿襲之前的方法，此所謂他們所認爲的「方便」或者習慣。這也是部分學生覺得較爲「安全」的做法。

對於解法 1b，其實是教師該堂課的授課要點之一：期望學生遇到根式，不要盲目有理化，而是先化簡再有理化。即，先將 $\sqrt{\frac{14}{21}}$ 化簡成 $\sqrt{\frac{14}{21}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，再有理化。認爲此方法「簡便」的學生，提到這樣其實是將問題中的大數變小，避免複雜計算，再進行有理化。

如何取捨？

看結果，兩種方法均是正確的。看過程，兩種方法各有利弊。解法 1a 容易上手，但後期計算麻煩，會遇到大數相乘，解法 1b 後期計算簡單，但前期的化簡易出錯。於是，這便可能帶來一個教學上的困境：是先約分化簡再去掉分母中的根號，還是先去分母中的根號再化簡？要不要固定哪種問題用哪種方法？還是二者兼而習之，讓學生靈活選取？

這些問題很能考驗教師教學的靈活性，也能體現一張工作紙設計的深度。分母有理化的最終目的是去掉分母中的根號，至於採取的方法或許要應人而異，應題而異。倘若，一見到分母有根號，就通過乘分母的方法達到有理化，其實是個技能性的知識（procedure knowledge）。假以時日，學生在有理化這個課題上不難拿取高的分數；但能看到問題中各數字之間的關係，再擇優選擇方法，則是通透了學習有理化或者化簡的目的，達成深層次的理解（deep understanding）。

作爲教師不應限制學生有不同的方法去完成該題數學問題，但實質的擔心還是會有的：其一是學生完成了第一步的有理化便認爲已達到要求，忘了分子還可以簡化；其二是當學生遇到 $\sqrt{294}$ 或者一些更大的數字時，往往會動搖他們去完成這題數的信心。這個課堂重點之一是令學生不要盲目地有理化，而是更靈活地選取不同的方法去完成題目，如果於課堂中能和學生比較兩種做法的分別，再提出一些先化簡後有理化且會更快捷得到答

案的例子時，學生會更明白數學不是一成不變地用同一方法去解決所有相類似的數學問題，而是有其他方法能更快捷地達到同一效果。這些方法上的比對或會更刺激學生的思維，讓學生的想法不會停留於只有一個一成不變的手法去學習數學。

我們常說，「船到橋頭自然直」。題目做多了，自然就會了。必要的操練能加深學生的概念理解，但一味地練習卻不解釋、不比較「爲何要這樣做？」,「爲何不那樣做？」，學生學會的也往往是一些技術性的東西，也往往形成按部就班的思路，缺乏對概念的深層理解。教學上多問學生，也問自己幾個「爲什麼」，無疑對教學是有幫助的。

作者電郵：張僑平 qpzhang@cuhk.edu.hk
黎潔婷 kitting_lai@yahoo.com.hk