

# 數學建模Mathematical Modeling

郭觀麟

東涌天主教學校

## 緒論

「老師，學數學有什麼用？」不論您的教齡多少、不論您是桃李滿門還是初入行甚至實習老師，只要您任教數學科，您都有機會遇到這個問題。

老師：「學數學可以訓練邏輯思考，更可以培養你的推理能力呀！」

學生：「日常生活中可曾有機會用到多項式、三角函數、數學歸納法、坐標幾何、空間向量、...？」

老師：「某些單元或許你現在覺得沒有即時用途，可是上大學時，尤其是理學院或工程學院，你就絕對需要這些基礎知識，才能繼續研究學習！」

學生：「如果我以後讀文學院，就用不上這些公式吧！買菜也只需要四則運算就夠了，為什麼要學這麼多數學啊！」

老師：「」(心想我還有很多工作)

以上的日常對話帶出一個問題：我們的學生不知所學為何。學習只是依照老師上課所講解的公式代入而已，其實學生並不了解問題的核心意義是什麼？老師雖然都發現了這個問題，但總是告訴學生題目做得不夠多，多做自然就會明白了。但實際上真的可行嗎？不斷操數就會突然清楚課程內容嗎？十居其九只是把方法硬記下來而已。許多學生就在渾渾噩噩中，盲目的學習老師所講授的數學課程，對於數學沒有任何好感及興趣，最後數學就淪為升學考試的工具。歸根究底，學生從不知道如何利用所學過的數學知識來解決日常問題，學生的思考能力在反覆操練中慢慢的被剝奪了。學生不需要懂得思考問題，只要會代入公式即可，但生活周遭的問題沒有特定的公式，所以學生就無所適從了。

## 數學建模

應用所學的數學知識去解決實際問題時，首先要建立「數學模型」(Mathematical Model)。「數學建模」則是建立數學模型的整個「過程」，數學建模是一種以數學思考模式並運用數學語言和方法將複雜的實際問題經由抽象、簡化而建立為數學結構，並解決實際問題的一種手段。在過程

中，學生需要思考、調查、蒐集數據資料、觀察實際對象的特點和規律，從而建立一個反映實際問題的數量關係，利用數學的概念和理論去分析、解決問題，當中需要熟練及深厚的數學基礎。另外，觀察力、聯想和想像力、對解難的興趣和廣博的知識也是不可或缺的。因此，數學建模可以以數學解決實際問題，讓學生真正了解數學的意義（姜啟源，1992）。

雖然現實問題都是極其複雜而充滿變數的，我們不可能完全用數學語言將其複製出來。但可以將實際問題中分析其抽象的本質，掌握主要因素，去除次要因素，經過必要的簡化，建立起相應的「數學模型」(楊啟帆，2006)。數學模型模仿了一個現實系統，但建立數學模型並非以模仿為目標，而是為了解決實際問題（徐全智，2003）。而各種臆測、判斷和假設、尋找對應關係、合理解釋都包含在建模活動之中（林福來，2003）。

### 為什麼要學數學建模

香港教育有著嚴重的考試倒流效應，強調數學問題的答案而忽略了思考推理的過程。而學習數學建模是從理論數學訓練到問題導向的數學專門知識的重要步驟，並且使學生有能力面對廿一世紀現代科技與文化的挑戰 (Arnold, 2004)

人類的認知可以分成知識(knowledge)、理解(comprehension)、應用(application)、分析(analysis)、綜合(synthesis)以及評估(evaluation)等不同層次(Krathwohl (Eds.).2001)。目前填鴨式的數學教育中，學生總是被動接受知識，數學的解題練習亦僅止於提高對於定理的熟練度與運算速度，絕少能應用在現實生活，更不用說能達到結合不同知識與批判思維這些層次了。而數學建模能提供學生更大的發揮空間，將所學的數學加以綜合，對數學模型加以評估。

### 數學建模的分類

數學模型可以按照問題的本質、解決的策略及方法，以及按照人們的各種不同意願、取向有各種不同的方式分類(任善強，1998)。以下是較常見的分類：

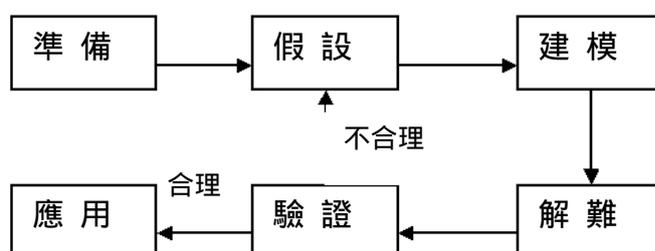
#### 1. 按應用範疇分類

對學習較為重要或對人類活動影響較大的數學模型，例如物理模型、經濟模型、天文模型、人口模型、生命系統模型、交通人流管制模型、生態環境模型、城市規劃模型、生產過程模型等。

2. 按數學概念分類  
分為初等數學模型、幾何模型、微分方程模型、？性規劃模型、概率模型、統計模型、力學模型等。
3. 按變量性質分類  
根據變量是確定或隨機、連續或離散、靜態或動態模型等。
4. 按建模目的分類  
可分為描述模型、仿真模型、分析模型、預測模型、優化模型、決策模型等。即使同樣的元素在不同的建模目的及策略可以有不同的模型。

### 數學建模步驟

以下為袁震東(2002)的「迭代」數學建模過程：



- (1) 為建模作準備：先深刻了解實際問題的背景、其目的、並進行調查研究，掌握變量的各種信息和數據，嘗試尋找規律。
- (2) 對問題作假設：現實情況涉及層面甚廣，應該把問題適當並符合實際背景地簡化。
- (3) 建立模型：根據之前的要求和假設，利用恰當的數學概念建立各種量之間的關係，並根據實際問題建立數學模型。在建立數學模型時有可能用到數學的任何一個範疇，而同一個實際環境亦可以用不同方法建立不同的數學模型。我們應盡可能採用簡單的數學方法建立容易實現及執行的數學模型，以便讓更多人接受、了解並使用這種模型。
- (4) 求解：模型中可能需要解各種類型的方程，可用計算機或電腦計算，以有效方法求出最佳答案。
- (5) 分析及驗證：根據模型的特點和結果進行分析，討論其穩定性及對精確度的影響。以計算結果對問題作出解答、預測。最後將結果與實際情況比較，檢驗模型是否合理，及對現實的應用程度。並要指出模型的使用範圍及注意事項。

(6) 實際應用：最後把所建立的數學模型應用到實際問題。

我們要強調建立模型是一個過程，不是一種死板的步驟，如果在分析和驗證過程發現模型合適，可考慮將模型投入應用。如發現不合理，那就必須修改假設，重新建模，重新求解，再作驗證。這一過程可以循環往復，直至得到滿意的結果為止。

## 數學建模的方法

模型建立的方法是多變、多樣的，例如制定最短路線問題，可以用圖論，也可以用線性規劃（劉承平，2002）。現實中同一問題可以以不同的模型來描述，從而會得到不同的答案，而且這些答案不會有絕對的對錯，重點在於模型能否實踐於實際環境及問題。

建模過程會隨著問題的性質、目的、建模者的知識領域不同而採用不同的建模方法。需要發揮創造力，觀察力，洞悉問題的關鍵所在，以及解決問題的策略。例如牛頓創建的微積分是因為在推導萬有引力定律時發現原有的數學方法無法解釋距離及位能的極限問題；尤拉亦為了研究柯尼斯堡七橋問題發明了圖論。

綜上所述，數學建模的方法可說是充滿無限的可能，所呈現出來的模型也各異其趣。但是在建模的過程中所使用的策略以及基本原則仍有許多共同點，在中學進行的數學建模，著重的應該就是讓學生在建模的過程體會到數學建模的精神。

## 在高中課程實踐數學建模

國內十分著重建模教學，會以具體實例引入，當中指數函數的介紹是透過具體實例，例如：細胞的分裂，考古中所用的 C14 的衰減，藥物在人體內殘留量的變化等等，瞭解指數函數模型的實際背景，體會引入有理指數的必要性。

以下列出在中學推行數學應用與建模教學的要點（嚴士健，2003）：

1. 選擇與學生的生活實際相關的問題，並減少對問題不必要的人為修改、加工和迎合考試需要。
2. 強調整個建模的過程，不僅僅是追求答案。
3. 選用的問題要包含不同的課題，有不同的層次，讓不同學術水平的學生有機會參與，並注意問題的可擴展性和開放性。
4. 應鼓勵學生在問題分析及解決的過程中多使用計算機或電腦。

5. 教師高度參與，因地制宜地蒐集、編制、修訂建模問題，根據學生的實際情況採取適當的教學策略。

在高中課程中，有不少課題可以用到建模概念。以下列出部份例子。

#### A. 極值問題

小童的父親要到美國訪問，受人之托希望多帶點東西。中國民航的《國際旅客須知》中有關規定："計件免費行李額"中規定"適用中美、中加國際航線上的行李運輸。經濟和旅遊折扣票價，免費交運的行李數為兩件，每件箱體三邊之和不得超過 62 英寸 (158 釐米)，但兩件之和不得超過 107 英寸(273 釐米)，每件最大重量不得超過32 公斤。"試問這兩個箱子的長、寬、高各為多少可達最大體積？請到市場上看看，商店出售的行李箱的尺寸與你計算所得結果是否近似？為什麼？

<第三屆北京高中數學知識應用？賽>

#### B. 線性規劃

某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。根據市場調查發現成為明歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數(形象指數與知名度指數的和)至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手(形象指數與知名度指數皆為 0)成為明歌星，至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台分配多少，效果最好。(請在坐標平面上畫圖求解)

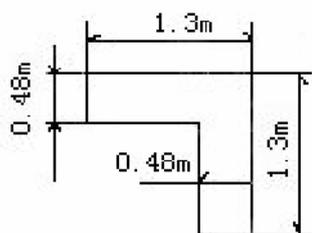
#### C. 概率及統計

某地發行 10 萬張彩票，其中有 100 張能中獎，即隨機抽取一張中獎概率為千分之一。小王認為買 1000 張彩票應該能中獎，但他買了 1000 張後卻沒中獎，他很高興。他的一個朋友告訴他，買 1000 張彩票不中獎的概率要大於 35%，他很吃驚，這個結論對嗎？請你估計一下這個概率，並給出解釋。

<第六屆北京高中數學知識應用？賽>

#### D. 幾何

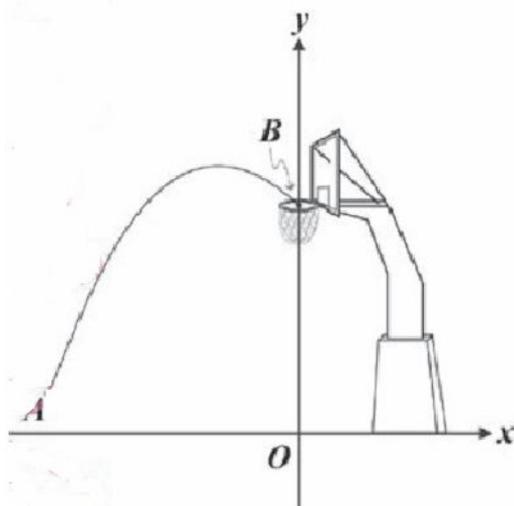
一房間的門寬為 0.9 米，牆厚為 0.28 米。今有一傢俱其水平截面如圖，問能否把此傢俱水平地移入房間內(說明理由)。



<第一屆北京高中數學知識應用? 賽>

E. 函數

下圖是一個直角坐標平面。已知籃框位置  $B$  點在  $y$  軸上，現有一籃球員將球從  $A$  點的位置投出，球經過的路徑是拋物線，由  $B$  點入籃。求此拋物線的函數。



G. 其他

啟文利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼(例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 與 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145)。已知小華的密碼為 2030，問啟文出生在什麼月份？

利用與現實生活相關的難題作建模訓練，可有效提升學生的探究及解難能力，從而提升他們的自信和興趣。

## 結語

不論是數學、科學、工程、醫學，以至各行各業要能持續進步發展，創意是絕對重要的一個元素。然而目前中學教育甚至香港社會中，創意的啟發並沒有得到太大重視。考試倒流效應影響了師生教與學的目標，結果得到「數學成績好」並不代表「數學能力好」的現象。以紙筆考試而言，數學要考得好，不外乎計算能力與解題能力兩個要素，這些只需要操練大量題目便有所提昇，學生只好透過反覆的演練以應付考試，短期記憶於考試完結後就喪失大半。

然而數學建模的過程中，解題的思考策略與創意十分重要，計算能力反而其次。大多數學生學習數學屢受挫折，很難從中獲得成就感。數學建模並沒有絕對的對錯，學生可從中學習優化問題，發揮創意來解難，藉此拉近學生之間計算能力的落差，讓程度較差同學也有表現機會，不因而放棄數學。

建模教學和傳統教學哪個較方便？後者。

哪個會製造「高分低能」？後者。

## 參考文獻

姜啟源(1992)，《數學模型》。台北：凡異出版社。

楊啟帆，談之奕，何勇(2006)，《數學建模》。杭州：浙江大學出版社。

徐全智，楊晉浩(2003)，《數學建模》，北京：高等教育出版社。

林福來(2003)，《透過數學建模活動培養高中生數學創造力》，網址：  
<http://www.creativity.edu.tw/modules/wfsection/download.php?fileid=55>。

Arnold, Neumaier, <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/model.html>

任善強、周寅亮(1998)，《數學模型》，台北：中央圖書出版社。

袁震東，《數學建模方法》，華東師範大學出版社

劉承平(2002)，《數學建模方法》，北京：高等教育出版社。

嚴士健、張奠宙、王尚志(2003)，《數學課程標準(實驗)解讀》，江蘇：江蘇教育出版社。

Krathwohl (Eds.). (2001). *A Taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of bloom's taxonomy of educational objectives*.