教室剪影：兩個錐體的故事 — 記一課堂的教學設計

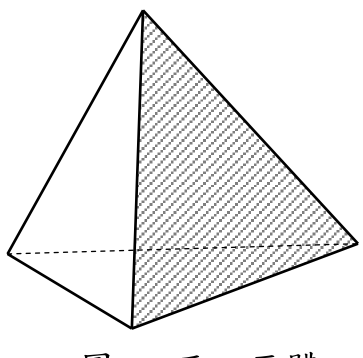
梁子傑
循道中學

以下是一個關於餘弦公式應用的課堂設計和記錄：

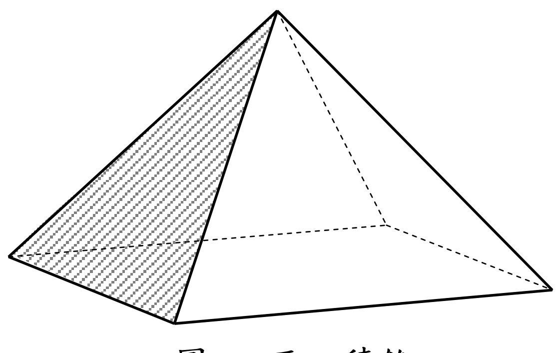
教師預先以布袋或紙箱將有關的模型收藏好，並帶入教室。在課堂開始的時候，教師要求學生想像一個正四面體和一個正四稜錐。所謂正四面體就是一個以等邊三角形為底的錐體，當中的所有稜都等長。所謂正四稜錐亦即是一個以正方形為底的錐體，當中的所有稜都等長。亦不妨假設該正四面體和正四稜錐所有稜的長度都相等。然後教師要求學生想像將正四面體的其中一個側面與正四稜錐的一個三角形側面重合，使之成為一個新的立體，並要求學生數數，究竟新造出來的立體共有多少個面。

由於要加強課堂的神秘感，亦為了要訓練學生的空間想像力，因此在開始的時候，教師並沒有展示任何的模型或在黑板上繪畫任何的圖形。不過，教師通過對話讓學生明瞭正四面體和正四稜錐各有多少個面，以及每一個面的形狀。教師亦鼓勵學生多作假設和猜想。為了增加課堂的互動性，教師即時進行一個「投票統計」，收集學生的意見。可供選擇的答案為 5、6、7、8、9。

經過第一輪的討論後，有部分學生仍然沒有足夠信心作出選擇。這時候，教師才在黑板上畫出正四面體和正四稜錐的草圖，供他們參考。教師在圖上加上陰影，以顯示將要重合的兩個等邊三角形（見圖一及圖二）。



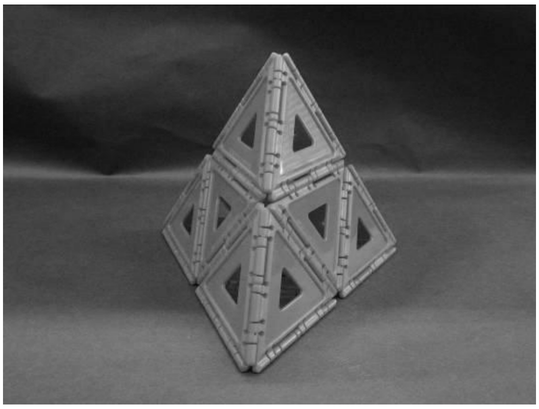
圖一 正四面體



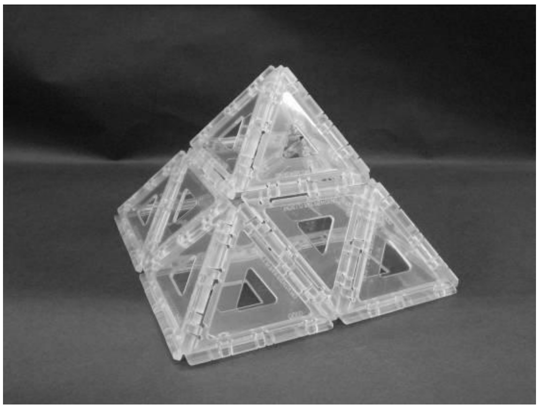
圖二 正四稜錐

當學生看到兩個草圖後，他們大多數都明白，正四面體有 4 個面，而正四稜錐則有 5 個。他們亦作出了以下的計算：4 + 5 – 2 = 7，因此他們傾向於選擇 7 個面為答案。不過在課堂上，教師亦讓有另類選擇的學生發表他們的見解。

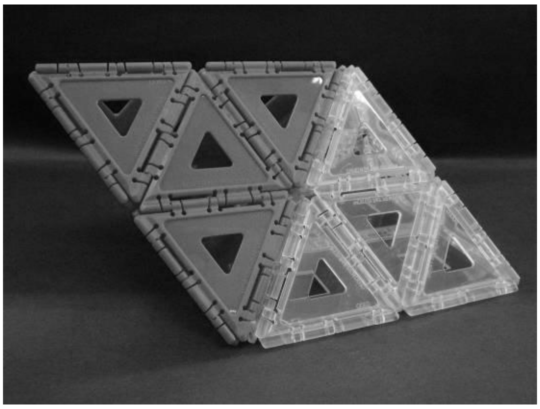
在第二輪討論和投票後，教師才拿出兩個預先收藏好的模型給學生看（見相片一和相片二），並即時將兩模型結合。這時候，學生驚訝地發現，原來結合後的立體，其中兩邊的兩個側面會分別匯合成一個平面，因而正確的答案應該是 5 個面才對（見相片三）！



相片一 正四面體模型



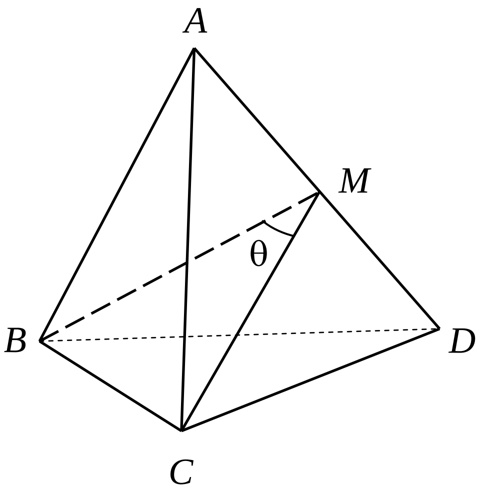
相片二 正四稜錐模型



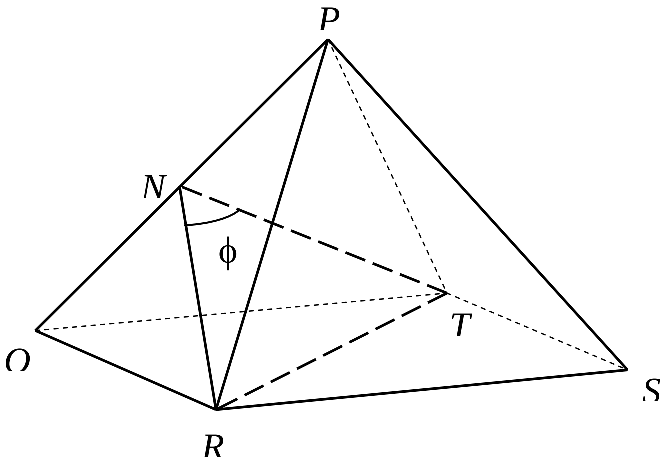
相片三 兩錐體結合後的結果

問題是：由兩個側面匯合而成的那個「平面」，究竟是一個真正的平面，還是一個近似於平面的折面呢？我們應該如何判斷呢？這時候，教師帶引學生回顧「直線上的鄰角」、「兩鄰角之和為 180°」、「兩平面之間的夾角」等概念，從而得到一個證題的方向：如果能夠證明正四面體兩個側面的夾角與正四稜錐兩個三角形側面的夾角之和為 180°，那麼正四面體的側面將與正四稜錐的側面匯合成一個平面。

教師先和學生回顧兩平面間夾角的定義，以及利用模型討論正四面體和正四稜錐夾角的位置，然後在黑板上的草圖加上適當的標記（如圖三及圖四）。設 M 和 N 分別為 AD 和 PQ 的中點，那麼正四面體的夾角為 $\angle BMC$，而正四稜錐的夾角為 $\angle RNT$，並分別記之為 θ 和 ϕ。接著，教師帶引學生計算 θ 和 ϕ 的大小。



圖三 正四面體的夾角



圖四 正四稜錐的夾角

假設錐體稜的長度為 2 個單位，那麼 $MB = MC = NR = NT = \sqrt{3}$，$RT = 2\sqrt{2}$。利用餘弦公式得 $\cos\theta = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$，即 $\theta = 70.5°$；$\cos\phi = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{3}$，即 $\phi = 109.5°$。這裏，$\theta + \phi = 180°$，因此正四面體上的 ΔABD 與正四稜錐上的 ΔPQT 匯合成一個平面。同理，ΔABC 亦與 ΔPRS 匯合成一個平面。總括而言，由正四面體和正四稜錐所合併出來的立體，只有 5 個面。

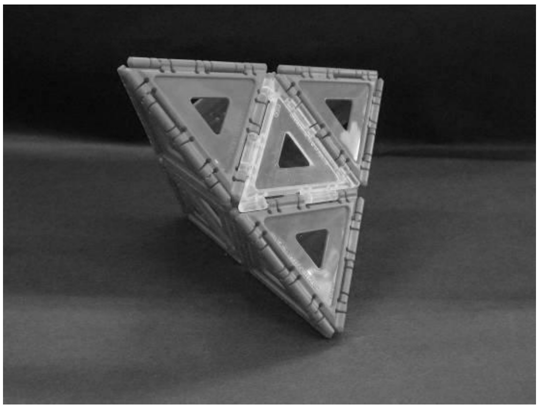
到此，教師向學生指出，我們其實不必使用計算機來計算 θ 和 ϕ 的大小。由於 $\cos\phi = -\dfrac{1}{3} = -\cos\theta$，因此我們可以應用餘弦互補的關係式，即 $\cos(180° - A) = -\cos A$，直接得到 $\theta + \phi = 180°$ 的結論。

在結束課堂之前，教師向學生介紹本課問題的出處。話說在 1980 年，美國舉行了一次全國性的基礎學術能力測試，而本題就是當年的其中一道測試題目。在成績公佈後，當年一名 17 歲名叫洛文（Daniel Lowen）的考

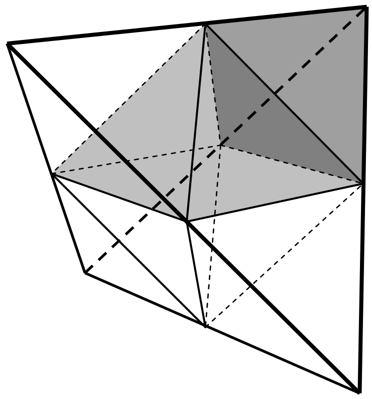
生作出了投訴，指當局的「標準答案」7 是錯誤的，並且製作了兩個模型來說明他的觀點。他這次投訴不單令到 20 多萬名考生獲得分數的調升，而且亦驚動了《紐約時報》，成為當年的一則有趣新聞云云。

教師在介紹以上故事的同時，亦引入了另一條問題供學生探討：據報道，故事中的主角洛文並沒有使用任何計算方法來證明兩個錐體的側面會匯合成一個平面，而他在考試期間亦不可能即場製作到兩個錐體模型來進行驗證，那麼他憑甚麼可以知道兩個側面會匯合成一個平面這個事實呢？

回望正四面體的模型。教師提示學生：其實正四面體當中是隱藏著一個正四稜錐和幾個較小的正四面體的（見相片四和圖五）。換言之，將一個正四面體和一個正四稜錐合併，合併出來的立體其實就是另一個較大正四面體的一部分！因此，兩個錐體的側面便會自然地匯合成為一個平面。想通這一點，就毋須任何計算都可以判定，由正四面體和正四稜錐所合併出來的立體，只有 5 個面了！



相片四 正四面體內藏正四稜錐



圖五 正四面體內藏正四稜錐

在課堂結束之前，教師總括如何利用餘弦公式來計算錐體側面夾角的方法。教師亦設計了一些類似的習題來鞏固學生所學。

根據經驗，整個課堂討論需時大約 40 至 50 分鐘。大多數學生對其中的問題和故事都感興趣，亦能同時溫習、應用和鞏固有關餘弦公式和立體幾何的知識，可以算是一個成功的教學設計。

參考文獻

談祥柏（1986）。《數學山海經》。上海：少年兒童出版社。

作者電郵：jckleung@netvigator.com