從具體到抽象，從基礎到延伸 —

高三數學復習教學案例一則

陳波

陝西省略陽縣天津高級中學

普通高中《數學課程標準》明確強調了高中數學教學要注意「體現知識的發生發展過程，促進學生的自主探索；課程內容的呈現，應注意反映數學發展的規律，以及人們的認識規律，體現從具體到抽象，特殊到一般的原則」。在新的課程理念之下，不斷深入的課程改革讓我們的數學教學發生著悄然無息而又積極本質的變化，課堂教學從教師的講與學生的聽變成了教師的引導與學生的自主探索，數學教學的課堂氣氛也活躍了，學生的個性也得到了張揚。尤其在數學教學的新授課中，這樣的理念得到充分體現，但由於高三數學復習內容多、節奏快，對學生思維要求高，因此高三數學復習教學又變成了教師一味地講，學生不斷地進行模仿式、機械式練習。

筆者認為新課程的教學理念在高三數學復習教學中仍不可忽視。特別是高三數學復習階段，我們常常會遇到一些由基礎知識所延伸出的一些抽象的性質、結論、定理。而這些抽象的性質、結論、定理正是我們踐行新課程理念的好素材，更是我們培養學生分析問題、歸納類比問題、發現問題以及創新問題能力的大好機會。經過高一、高二階段的數學學習，學生具備了大量數學基礎知識，在高三數學復習階段，教師從學生已經具備的具體的數學基礎知識或具體的數學問題入手，展現另一知識點或問題發生、發展過程，不僅能鼓勵學生自主探索、合作交流，更能使學生對知識之間、基礎知識與延伸知識之間以及相近或相似問題之間的區別與聯繫深入、系統地理解，也能使我們的復習教學達到事半功倍的效果。基於此，筆者將自己在高三數學復習教學中的一些做法以一則案例的形式展現如下，與廣大同仁共勉。

高三數學復習中關於函數部分，我們常會見到下面兩個結論：

結論 1： $y=|f(x)|$的圖像可將$y=f(x)$的圖像在x軸下方的部分沿x軸翻折到上方，其餘部分不變。

結論 2： $y=f(|x|)$的圖像，可先作出$x\ge 0$時$y=f(x)$的圖像，再利用偶函數圖像關於y軸對稱作出$x<0$時的圖像。

對於這兩個結論，學生感覺是抽象的。如果教師在課堂上直接給出這兩個結論，然後通過舉例應用使學生理解這兩個結論，那麼學生很難本質地去理解這兩個結論。

筆者思考，不妨從下面幾個問題為流程來引導學生學習這兩個結論：

問題 1：試作下面四個函數的圖像。

① $y=x^2-2x-3$ ② $y=|x^2-2x-3|$

③ $y=x^2-2|x|-3$ ④ $y=x^2-|2x-3|$

對於函數①，學生都能作出圖像，如圖一所示。

對於函數②、③、④的圖像，先讓學生自己嘗試作圖，並體會作圖過程中思維的障礙點。之後，教師再提出問題。

問題 2：對於函數②、③、④的圖像，在作圖過程中同學們感到困惑之處在哪？

經過教師與學生的交流、分析，多數學生認為這三個函數帶有絕對值，這是阻礙大家順利作出圖像的障礙點。

問題 3：能否去掉絕對值？

引導學生回顧初中所學過的關於絕對值的知識點$|a|=\begin{cases}a & (a\ge 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$。

此時，教師再引導學生對函數②、③、④去掉絕對值，得：

$$y=|x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x^2-2x-3\ge 0)\\ -x^2+2x+3 & (x^2-2x-3<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\le -1\text{或}x\ge 3)\\ -x^2+2x+3 & (-1<x<3)\end{cases}$$

$$y=x^2-2|x|-3=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\ge 0)\\ x^2+2x-3 & (x<0)\end{cases}$$

$$y=x^2-|2x-3|=\begin{cases}x^2-2x+3 & (2x-3\ge 0)\\ x^2+2x-3 & (2x-3<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2-2x+3 & \left(x\ge \dfrac{3}{2}\right)\\ x^2+2x-3 & \left(x< \dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$$

於是函數②、③、④轉化成了分段函數進行作圖。經過教師引導，學生實踐操作，得函數②、③、④的圖像分別如圖二、圖三、圖四中實線部分。

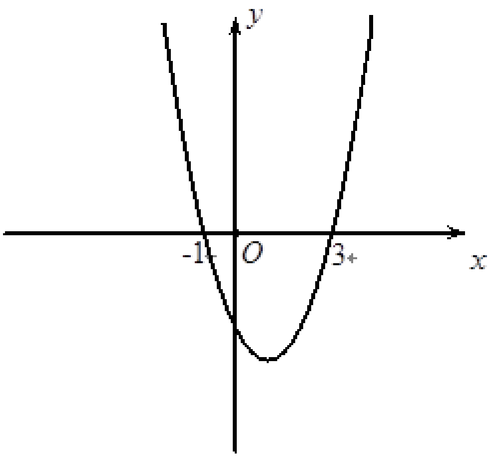

圖 一

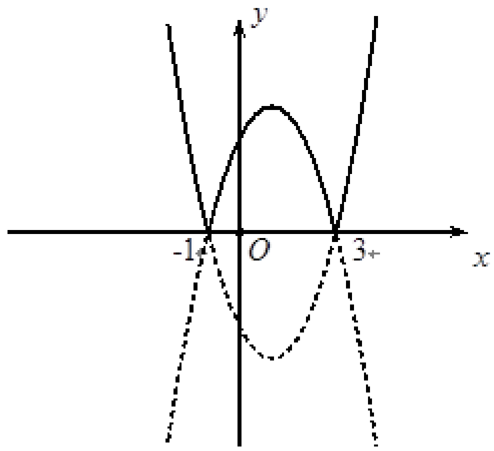

圖 二

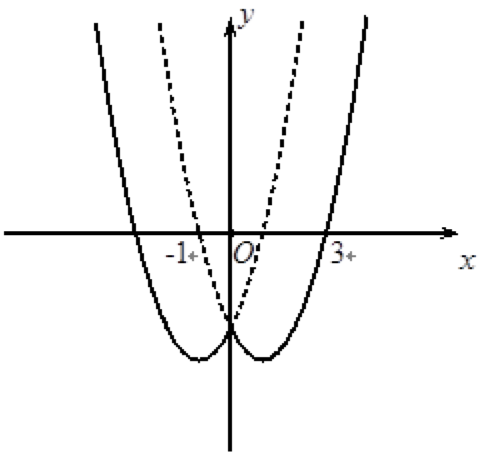

圖 三

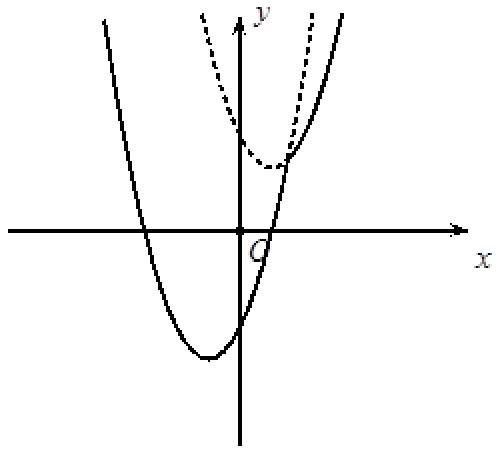

圖 四

在學生經歷了問題 1 的求解過程後，教師引導學生觀察圖一、圖二、圖三、圖四，進一步提出如下問題：

問題 4：函數②的圖像與函數①的圖像有什麼聯繫？

引導學生觀察圖二發現：

1、函數 $y=x^2-2x-3$ 與函數 $y=-x^2+2x+3$ 的圖像關於 x 軸對稱。

2、函數 $y=x^2-2x-3$ 在 $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ 部分的圖像與函數 $y=-x^2+2x+3$ 在 $x\in(-1,3)$ 部分的圖像構成了函數②的圖像。

進一步，發現只需將函數①的圖像在 x 軸下方的部分關於 x 軸對稱上去就可得到函數②的圖像，由此可以抽象出結論 1。

問題 5：函數③的圖像與函數①的圖像有什麼聯繫？

引導學生觀察圖三發現：

1、函數 $y=x^2-2x-3$ 與函數 $y=x^2+2x-3$ 的圖像關於 y 軸對稱。

2、函數 $y=x^2-2x-3$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 部分的圖像與函數 $y=x^2+2x-3$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 部分的圖像構成了函數③的圖像。

進一步，發現只需將函數①的圖像在 y 軸右側的部分保留，並將 y 軸右側的部分關於 y 軸對稱到左側，就可得到函數③的圖像。由函數③的圖像還可看出函數③是偶函數。再注意到函數 $y=x^2-2|x|-3=|x|^2-2|x|-3$，由此可以抽象出結論 2。

通過對上述五個問題的思考探究，教師再引導學生交流思考並對函數②、③、④歸納為如下三種類型：

類型 1　形如函數 $y=|f(x)|$，例如函數②。

類型 2　形如函數 $y=f(|x|)$，例如函數③。

類型 3　形如 $y=u(x)$ 與 $y=|v(x)|$ 結合而成的函數，例如函數④。

同時，對於這三種類型的函數圖像作法總結如下：

共同作法：利用$|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$去掉絕對值，從而把這三類函數都轉化為分段函數進行作圖。這也是作帶有絕對值的函數的通法。

不同作法：關鍵要理解函數$y=|f(x)|$的圖像與函數$y=f(x)$的圖像之間的關係，因此對函數類型 1 而言，有其特有的作圖方法，即結論 1 的應用。

關鍵要體會函數$y=f(|x|)$的圖像與函數$y=f(x)$的圖像之間的關係，因此對函數類型 2 而言，也有其特有的作圖方法，即結論 2 的應用。

對於函數類型 3 的作圖沒有特別有的作圖方法，只能利用$|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$去掉絕對值，從而轉化為分段函數進行作圖。

最後，教師再給出一道練習如下：

問題 6：試作下面三個函數的圖像。

① $y=|\log_2 x-1|$　② $y=\sin|x|$　③ $y=|x-2|(x+1)$

教學感悟：

案例中的兩個結論是抽象的，筆者在學生已有的認知基礎上，引導學生從具體的問題 1 入手，通過引導學生觀察、操作、比較、歸納、交流等數學思維活動，讓學生經歷了從具體到抽象、 從基礎到延伸的數學活動過程。同時，在這一過程中注意讓學生感受解決問題受阻的思維點，教師再提點學生受阻的思維點，學生的思維必然會有跳躍和提升。最後，問題 6 又是讓學生感受抽象到具體的活動過程。高三數學復習過程中，深刻理解一些新知識與舊知識之間，具體問題與抽象問題之間的區別與聯繫顯得非常重要，而新舊知識之間、具體與抽象之間因為存在「潛在距離」使得學生難以發現它們之間的區別與聯繫，這就需要教師在教學過程中合理架設「認知橋樑」以縮短這種「潛在距離」，才能有效地幫助學生本質地理解和掌握數學中一些抽象的性質、結論、定理。

作者電郵：bbcenglish888888@126.com